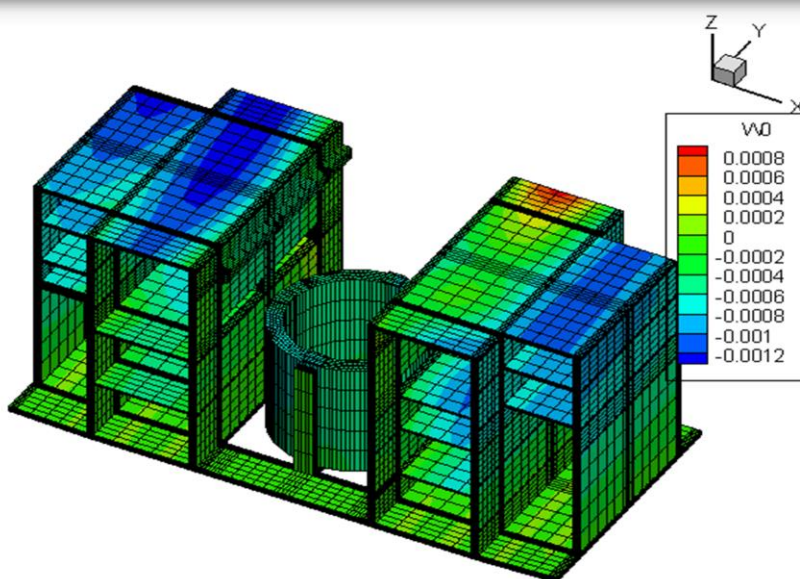
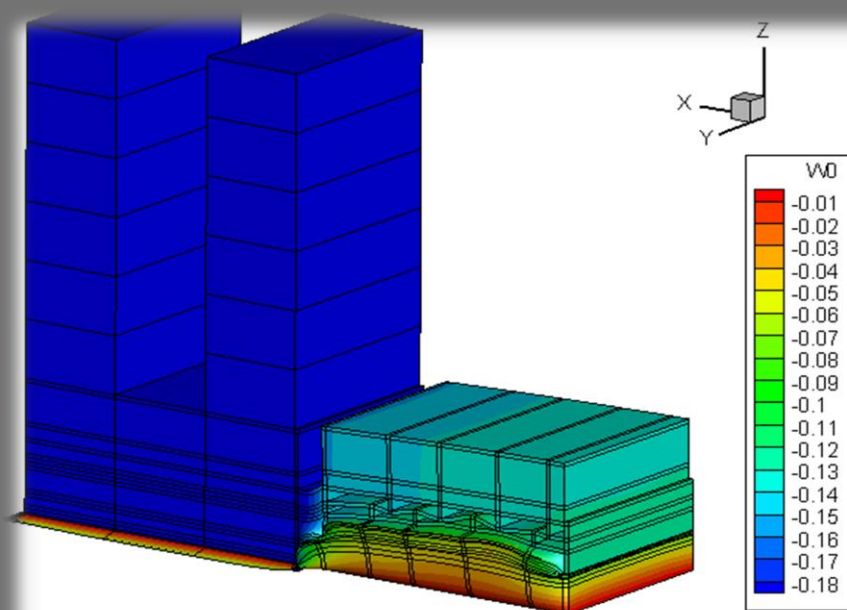


2022.0

ПК GeomechanICS

Руководство пользователя

Версия 2022.0



СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ В GEOMECHANICS

- Назначение системы
- Структура и модули системы
- Установка программного обеспечения
- Защита от несанкционированного использования

ГЛАВА 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОВМЕСТНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СООРУЖЕНИЯ И ОКРУЖАЮЩЕГО ГРУНТОВОГО ОСНОВАНИЯ

ГЛАВА 3. ОПИСАНИЕ ИНТЕРФЕЙСА ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ПК «GEOMECHANICS»

- Препроцессор
- Подготовка расчетной модели в препроцессоре
- Режимы визуализации модели

ГЛАВА 4. ВЕРИФИКАЦИЯ ПРОГРАММЫ

ГЛАВА 5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Глава 1. Введение в GeomechanICS

НАЗНАЧЕНИЕ СИСТЕМЫ

Программный комплекс «GeomechanICS» предназначен для решения геотехнических задач.

Сфера использования GeomechanICS - решение задач сложного взаимодействия массива грунта с фундаментами и конструкциями зданий и сооружений в промышленно-гражданском, дорожном, гидротехническом строительстве, горном деле, нефтегазовой отрасли и др.

GeomechanICS рассчитывает в трёхмерной постановке напряжения и деформации в сооружениях и грунте, определяет осадку, устойчивость, несущую способность грунтовых массивов и решает фильтрационные и динамические задачи.

Программа предназначена для специалистов, выполняющих расчёты сооружений в промышленном, гражданском, гидротехническом, транспортном, подземном и других видах строительства, а также полезна:

- **Изыскательским организациям** — для оценки устойчивости природных склонов и предварительного анализа противооползневых конструкций, а также для оценки влияния изменения уровня грунтовых вод и расчётов напряжений от собственного веса.
- **Проектным организациям** — для расчётного обоснования проектных решений, что является основой процесса проектирования.
- **Строительным организациям** — для проверки корректности проектных решений и возможности оперативной оценки сложных геотехнических ситуаций на строительной площадке и принятий решений.
- **Службе Заказчика** — для контроля надёжности принятых проектных решений.

Работу оснований, фундаментов и подземных конструкций следует рассматривать как единую систему, отдельные части которой оказывают взаимное влияние друг на друга. Осадки грунтов оснований зависят от действующей нагрузки, параметров и конструктивных особенностей фундаментов, а также от типа самого сооружения и жесткости его конструктивной схемы. Имеется и обратная связь - конструкция, основные размеры и схема сооружения зависят от специфики напластования грунтов основания, их сжимаемости и нагрузок, которые они могут воспринимать.

СТРУКТУРА И МОДУЛИ СИСТЕМЫ

Программный комплекс «GeomechanICS» состоит из трех независимых модулей, объединенных в одной оболочке:

QUASISTATIC - модуль расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) пространственных зданий и сооружений совместно с грунтовым массивом в 3D – постановке при воздействии произвольных статических, квазистатических и динамических нагрузок с учетом упруго-вязко-пластического поведения материалов и фактора времени.

FILTRATION - модуль расчета НДС пространственных зданий и сооружений в грунтовых средах и фильтрационных параметров пластов при воздействии произвольных статических и квазистатических нагрузок с учетом упруго-вязко-пластического поведения материалов и фактора времени в 3D – постановке.

THERMOELAST - модуль расчета НДС и температурных параметров пространственных зданий и сооружений совместно с грунтовым массивом с учетом фазовых переходов

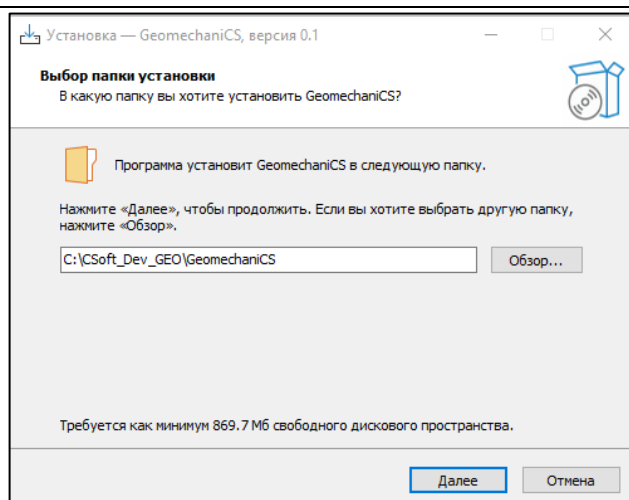
замораживания-оттаивания, нагрева и с учетом действия произвольных статических и квазистатических нагрузок и упруго-вязко-пластического поведения материалов в 3D – постановке.

Первая версия программного комплекса «GeomechanICS» представляет собой упрощенный вариант, обеспечивающий ей самодостаточность. Генерация трехмерной конечно-элементной сетки (гексаэдральной) производится в полуавтоматическом режиме. При этом имеются ограничения, связанные с конечно-элементным представлением зданий и сооружений нестандартных геометрических форм, а также грунтовых массивов сложного строения.

В последующих версиях эти ограничения будут сняты. Как в большинстве программ, специализирующихся на решении геотехнических задач, трехмерные области будут разбиваться в автоматическом режиме на тетраэдральную сетку.

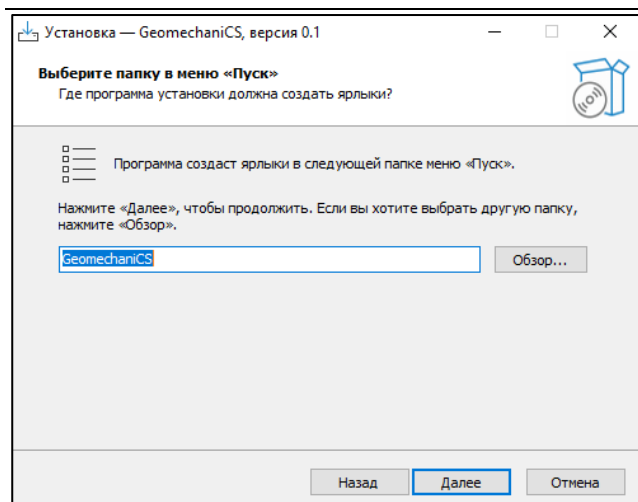
УСТАНОВКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

В дистрибутиве программного обеспечения имеется установщик – исполняемый файл setup_GMCS.exe. Чтобы запустить установщик, необходимо позиционировать на файле курсор и кликнуть ЛКМ дважды. Открывается окно, где можно скорректировать параметры директории установки ПО. **Но предпочтительно оставить как есть.**



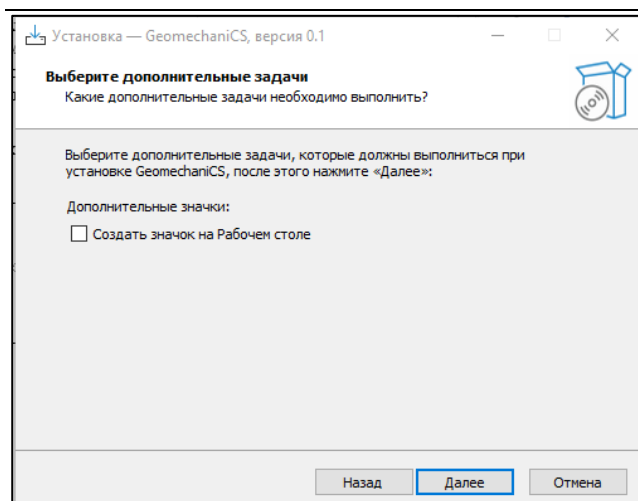
После корректировки следует нажать кнопку «Далее»

В следующем окне предлагается выбрать папку в меню «Пуск», из которой будет запускаться программа.

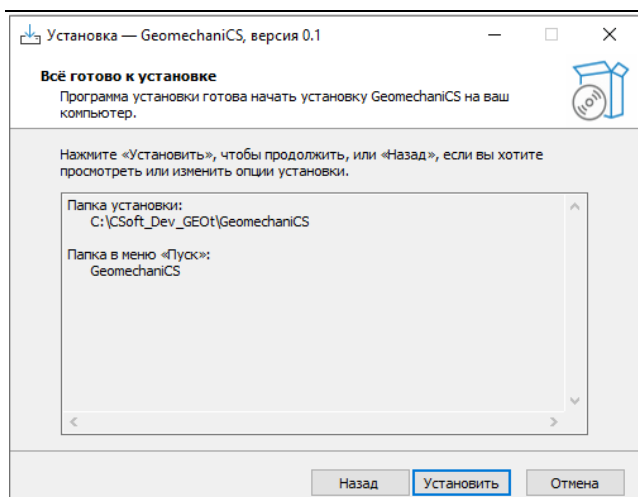


После выбора надо нажать кнопку «Далее»

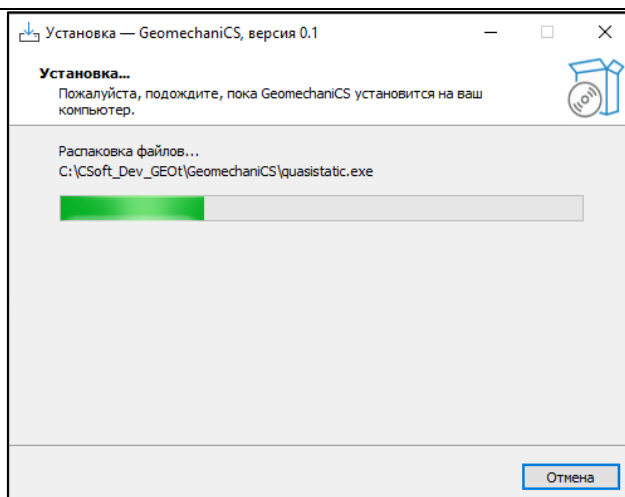
Открывается окно, в котором имеется возможность дополнительно обозначить опцию создания значка на рабочем столе или отказаться от нее. Для продолжения установки нажать кнопку «Далее».



Следующее окно носит информационный характер. Для продолжения установки нажать кнопку «Установить».

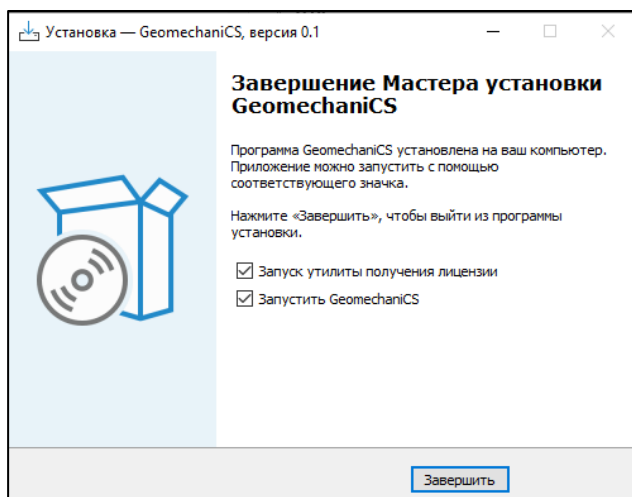


Начинается процесс установки.



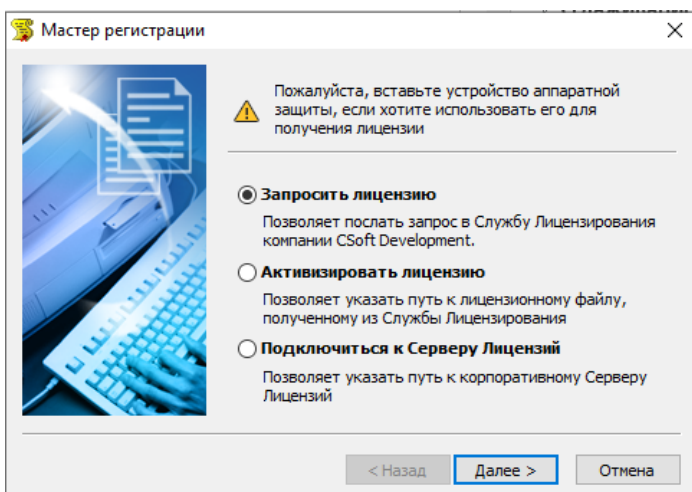
По завершении установки можно включить/отключить опции **Запуска утилиты получения лицензии** и **Запуска ПО GeomechanICS**.

Нажать кнопку «Завершить».

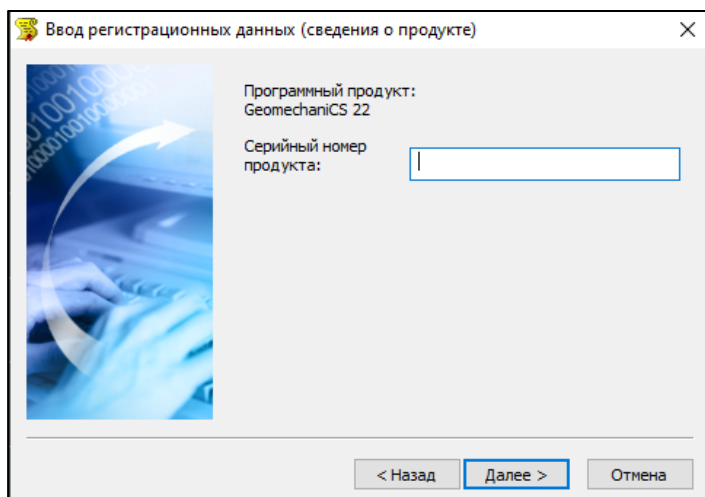


Если выбрана опция **Запуска ПО GeomechanICS**, то через некоторое время откроется главное окно ПО GeomechanICS.

Если выбрана опция **Запуска утилиты получения лицензии**, то появится окно с тремя опциями.

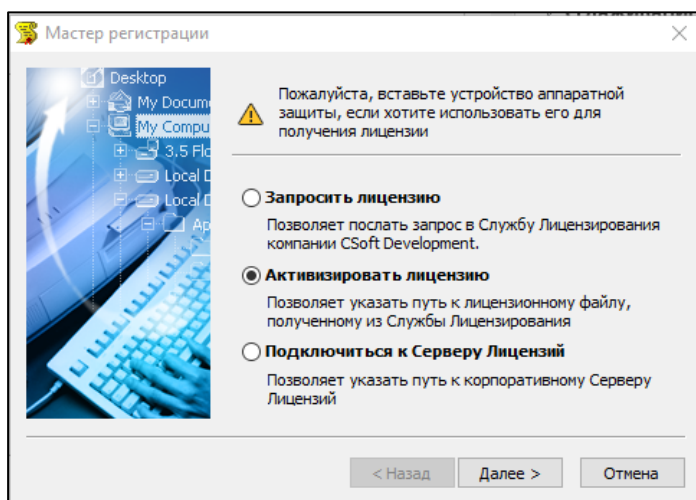


Запрос лицензии осуществляется по серийному номеру продукта.

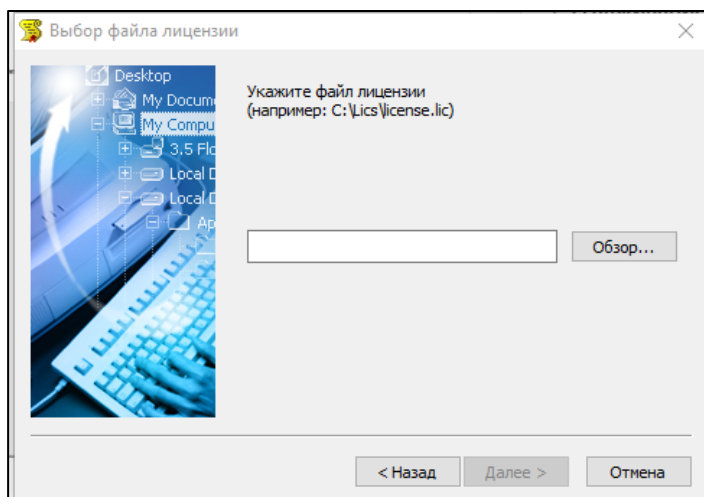


Текущая версия ПО Geomechanics не предусматривает демо-варианта. Поэтому для получения серийного номера необходимо связаться с разработчиком (ООО «СиСофт Разработка» по электронной почте: devyatov@csoft.ru).

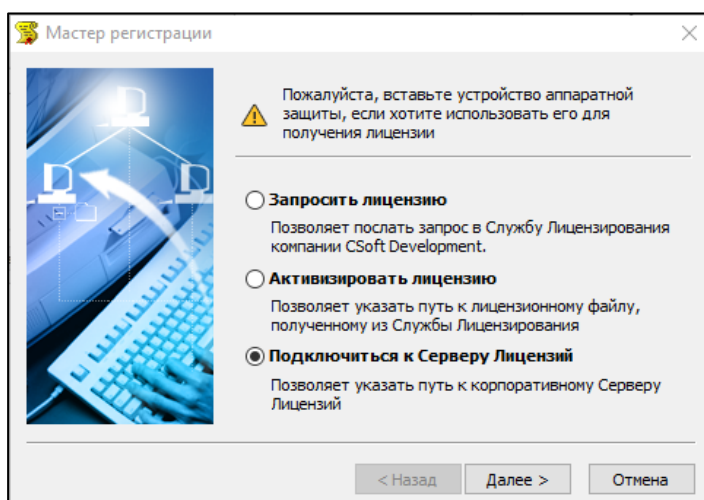
Вторая опция (**Активировать лицензию**) используется после получения от разработчика лицензионного файла (**license.lic**). Необходимо эту опцию отметить и нажать кнопку «Далее».



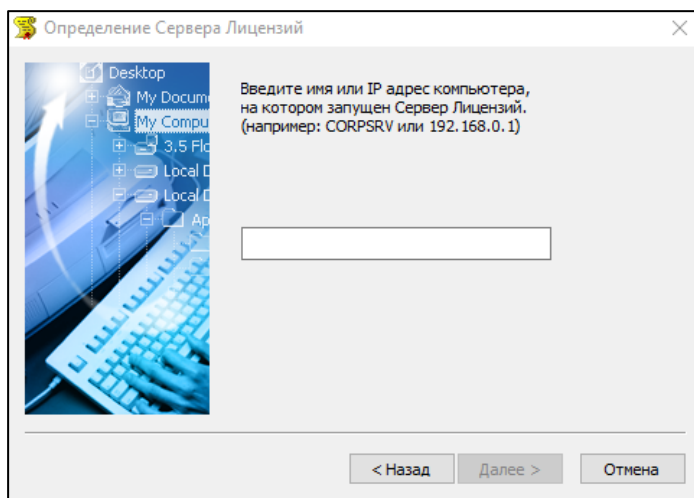
В следующем окне необходимо указать месторасположение файла лицензии.



В случае, если лицензия сетевая и прикреплена к другому ПК в сети предприятия, выполняющего роль сервера лицензий, необходимо воспользоваться третьей опцией (**Подключиться к серверу лицензий**) и нажать кнопку «Далее».



В следующем окне нужно указать имя сервера.



ЗАЩИТА ОТ НЕСАНКЦИОНИРОВАННОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

В программном комплексе «GeomechanICS» лицензируются решатели системы: biot.exe, quasistatic.exe, thermoelastic.exe. Лицензия позволяет запускать приобретенные версии решателей на одном компьютере в одном экземпляре. При обновлении ПК «GeomechanICS» до более новой версии необходимо обновить лицензию. Пре- и постпроцессор не лицензируются.

Глава 2. Теоретические основы совместного деформирования сооружения и окружающего грунтового основания

Несмотря на то, что неупругое поведение грунтов и армированного железобетона весьма различно, можно построить общую математическую модель их совместного деформирования на основе теории упруго-вязкопластичности. Задействуя различные параметры общей модели, можно получать описание работы либо грунта, либо железобетона.

Рассмотрим сначала поведение грунтов под нагрузкой. Их неупругое деформирование имеет некоторые экспериментально наблюдаемые особенности в сравнении с неупругим деформированием классических сред, таких, как металлы.

Во-первых, для грунтов, вследствие их большой пористости, характерно существенное влияние среднего напряжения на деформацию. В то время как при увеличении деформаций плотность малого элемента грунта из-за переупаковки частиц и их дробления может заметно возрастать, при уменьшении деформаций, ввиду необратимости таких процессов, плотность снижается незначительно. Таким образом, грунты являются средами с двойной пластичностью – по сдвигу и по объемному сжатию.

Во-вторых, на напряженное состояние грунта влияет скорость объемного деформирования. Этот факт можно объяснить тем, что в разрушенном скелете грунта связи между частицами сводятся в основном к контактному взаимодействию с трением. Причем это взаимодействие проявляется в большей мере при объемном сжатии, чем при сдвиге. Поэтому большинство моделей учитывает вязкость по объемному сжатию.

Наконец, нескальные грунты практически не выдерживают растягивающих деформаций, что также должно отражаться в уравнениях состояния моделей.

Описание моделей грунтов, используемых в модуле QUASISTATIC.

Для решения задач, в которых поровое давление флюида, изменение температурного режима не оказывает существенного влияния на механическое поведение грунтового основания, в ПК GeomechanICS предлагается использовать модели грунтов, являющиеся обобщением теории идеальной пластичности Друккера - Прагера [9, 26]. В российской научной школе они представлены в работах Григоряна С.С., Ляхова Г.М., Рыкова Г.В., Евтерева Л.С., Замышляева Б.В и других авторов [7, 5, 12, 17, 18, 19, 20, 36, 39]. Данные модели реализованы в модуле QUASISTATIC в геометрически линейной постановке, то есть в предположении о малости деформаций.

Учитывая свойство вязкости грунтов постановку задачи удобнее осуществлять в скоростях перемещений (после дискретизации – в приращениях). Используется аддитивное разложение для скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}$:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p,$$

или

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^{vp},$$

где $\dot{\varepsilon}^e$, $\dot{\varepsilon}^p$, $\dot{\varepsilon}^{vp}$ - скорости упругой, пластической и вязкопластической деформации.

1. Модель грунта, основанная на теории пластического течения с ассоциированным законом, учитывающая влияние гидростатического давления без учета влияния скорости деформирования.

Имеют место следующие предположения:

- Функция нагружения f зависит от объемного напряжения σ и от s - девиатора тензора напряжений σ :

$$f = f(\sigma, s), \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}. \quad (I.1.1)$$

- Используется критерий Мизеса-Шлейхера пластического течения:

$$\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{2} F^2(\sigma), \quad F(\sigma) = k_0 + b\sigma \quad (I.1.2)$$

где k_0 - предел упругости по сдвигу, выраженный в напряжениях, а b - угол внутреннего трения грунта. Уравнение (I.1.2) определяет в пространстве главных напряжений конус с осью, задаваемой условием $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

- В состоянии активного нагружения ($\dot{f} = 0$) выполняется ассоциированный закон пластического течения Прандтля-Рейсса в шестимерном пространстве напряжений:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (I.1.3)$$

- Упругая часть деформации подчиняется закону Гука в скоростях:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = H_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (I.1.4)$$

с тензором упругой податливости H_{ijkl} .

- Поскольку грунты обладают свойством пластического упрочнения, то теорию идеальной пластичности Друккера-Прагера необходимо дополнить законом упрочнения материала. Используется возможность совместного *изотропного* упрочнения с параметром χ и *трансляционного* (или *кинематического*) упрочнения, характеризуемого тензорным параметром α . В качестве «веса» коэффициента, позволяющего объединить оба эти типа, выступает константа β ($0 \leq \beta \leq 1$). Случай $\beta = 0$ соответствует чисто кинематическому упрочнению, а $\beta = 1$ - чисто изотропному упрочнению.

Сделанные предположения изменяют вид функций f и F в соотношениях (I.1.1) и (I.1.2):

$$f = J_1(\sigma), J_2(s), \alpha_{ij}, \chi = \frac{1}{2} \xi_{ij} \xi_{ij} - \frac{1}{2} F^2(\sigma, \chi), \quad (I.1.5)$$

где:

$$\xi_{ij} = s_{ij} - \alpha_{ij}, \quad F(\sigma, \chi) = k_0 + b\sigma + \beta\chi. \quad (I.1.6)$$

Уравнение (I.1.5) задает сферу в шестимерном пространстве напряжений, при этом кинематическое упрочнение, характеризуемое параметром α , отвечает за перемещение центра поверхности нагружения, а изотропное упрочнение, представляемое параметром χ – за увеличение радиуса $F(\sigma, \chi)$ поверхности нагружения.

Построим уравнения состояния модели. Для этого продифференцируем по σ_{ij} выражение (I.1.5) для функции нагружения:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \xi_{kl} \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(\sigma_{ij} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} \delta_{kl} - \alpha_{kl} \right) - \frac{\partial F}{\partial \sigma} F \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ij}} = \xi_{ij} - bF \frac{\delta_{ij}}{3} \quad (\text{I.1.7}).$$

Значение производной $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$ взято из соотношения (I.1.6).

Для скорости пластических деформаций из уравнений (I.1.3) и (I.1.7) получим:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \left(\xi_{ij} - \frac{bF}{3} \delta_{ij} \right) \quad (\text{I.1.8})$$

Отсюда для девиатора тензора, в частности, следует:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \xi_{ij}, \quad (\text{I.1.9})$$

где:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{\dot{\theta}^p}{3} \delta_{ij}. \quad (\text{I.1.10})$$

Выберем в качестве параметра для функций упрочнения α и χ величину эффективности пластических деформаций (по Мизесу: эквивалентную деформацию) ε_{eqv}^p :

$$\varepsilon_{eqv}^p = \int_0^t \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} dt \quad (\text{I.1.11})$$

Величина ε_{eqv}^p , таким образом, является длиной кривой процесса пластических деформаций в пятимерном пространстве девиаторов деформаций.

Из определения (I.1.11) и формулы (I.1.9) получим:

$$\dot{\varepsilon}_{eqv}^p = \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} = \dot{\lambda} \sqrt{\xi_{ij} \xi_{ij}}. \quad (\text{I.1.12})$$

Для функции χ и α_{ij} примем следующий вид [72]:

$$\chi = \varphi \varepsilon_{eqv}^p; \quad \dot{\alpha}_{ij} = 1 - \beta \varphi' \varepsilon_{eqv}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (\text{I.1.13})$$

Тогда из условия непрерывности поверхности нагружения получим:

$$\dot{\lambda} = \frac{\xi_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - bF \dot{\sigma}}{F^2 \varphi' \varepsilon_{eqv}^p} \quad (\text{I.1.14})$$

Действительно, вычислим производную по времени от функции нагружения:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \dot{\chi}. \quad (\text{I.1.15})$$

Для частных производных, входящих в данное выражение, из определения (I.1.5), (I.1.6) будем иметь:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} = \xi_{kl} \frac{\partial \sigma_{kl} - \alpha_{ij} \delta_{ik} \delta_{jl}}{\partial \alpha_{ij}} = -\xi_{ij}. \quad (\text{I.1.16})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \chi} = -F \frac{\partial F}{\partial \chi} = -\beta F$$

В свою очередь, из выражения (I.1.13) следует:

$$\dot{\chi} = \varphi' \varepsilon_{eqv}^p \dot{\varepsilon}_{eqv}^p \quad (\text{I.1.17})$$

Подставляя (I.1.7), (I.1.13), (I.1.16), (I.1.17) в формулу (I.1.15) для \dot{f} и учитывая соотношение (I.1.9), получим:

$$\dot{f} = \xi_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - bF \dot{\sigma} - \dot{\lambda} F^2 \varphi' \varepsilon_{eqv}^p, \quad (\text{I.1.18})$$

откуда и следует утверждение (I.1.14) для процесса активного нагружения ($f = 0$).

Теперь выражение (I.1.8) для тензора скоростей пластических деформаций можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \frac{\xi_{kl} \dot{\sigma}_{kl} - \frac{bF}{3} \delta_{kl} \dot{\sigma}_{kl}}{F^2 \varphi' \varepsilon_{eqv}^p} \left(\xi_{ij} - \frac{bF}{3} \delta_{ij} \right) = \\ &= \frac{\left(\xi_{ij} - \frac{bF}{3} \delta_{ij} \right) \left(\xi_{kl} - \frac{bF}{3} \delta_{kl} \right)}{F^2 \varphi' \varepsilon_{eqv}^p} \dot{\sigma}_{kl}. \end{aligned} \quad (\text{I.1.19})$$

Объединяя выражения (I.1.4) и (I.1.19) для тензоров скоростей деформаций в упругой и пластической области, получим определяющие соотношения рассматриваемой модели для процесса активного нагружения:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \left[H_{ijkl} + \frac{\left(\xi_{ij} - \frac{bF}{3} \delta_{ij} \right) \left(\xi_{kl} - \frac{bF}{3} \delta_{kl} \right)}{F^2 \varphi' \varepsilon_{eqv}^p} \right] \dot{\sigma}_{kl}, \quad (\text{I.1.20})$$

или в обращенном виде:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl}^* \dot{\varepsilon}_{kl} \\ C_{ijkl}^* &= \left[H_{ijkl} + \frac{\left(\xi_{ij} - \frac{bF}{3} \delta_{ij} \right) \left(\xi_{kl} - \frac{bF}{3} \delta_{kl} \right)}{F^2 \varphi' \varepsilon_{eqv}^p} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I.1.21})$$

Как видно, они обладают свойством симметрии по тем же парам индексов, что и тензор упругих податливостей H_{ijkl} .

Однако из соотношений (I.1.20), (I.1.21) следует, что связь между эквивалентными напряжением и деформацией в пластической области, а также шаровыми частями для начально-изотропной среды имеют вид:

$$\sigma_{eqv} = \varphi(\varepsilon_{eqv}^p), \quad \sigma = \left[\frac{1}{K} + \frac{b^2}{\varphi' \varepsilon_{eqv}^p} \right]^{-1} \theta. \quad (\text{I.1.22})$$

где K - упругий модуль объемного растяжения-сжатия.

Рассматриваемая модель нагружения грунта имеет определенный недостаток. Дело в том, что, как следует из (I.1.22), диаграммы нагружения при сдвиге и объемном деформировании связаны друг с другом так, что мягкой характеристике сдвиговой кривой соответствует мягкая характеристика кривой при всестороннем сжатии. Для грунтов это не обязательно выполняется [5]. Поэтому целесообразно привлечь не ассоциативный закон течения.

2. Модель грунта, основанная на теории пластического течения с неассоциированным законом, учитывающая влияние гидростатического давления и скорость деформирования.

Можно рассматривать ассоциированную теорию течения только в пятимерном пространстве Ильюшина [15]

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}, \quad (\text{I.1.23})$$

тогда как одномерное соотношение между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций выбрать согласно теории вязкопластичности. Используя соотношение типа Кристеску-Малверна:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{K \theta} \dot{\sigma} + g \sigma - f^{st} \theta, \quad K \theta = \frac{df^d}{d\theta} \theta, \quad (\text{I.1.24})$$

получим модель, являющуюся трехмерным обобщением уравнений, используемых Григоряном С.С. и Рыковым [7, 36].

При медленном деформировании связь между объемными напряжениями и деформациями задается функцией $f^{st} \theta$, а при быстром – функцией $f^d \theta$. При этом, статическая и динамическая кривые могут иметь независимо друг от друга как мягкую, так и жесткую характеристики.

Для девiatorов тензоров, в этом случае, определяющие соотношения примут вид:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \left(P_{ijkl} + \frac{\xi_{ij} \xi_{kl}}{F^2 \varphi' \epsilon_{eqv}^p} \right) \dot{s}_{kl} - \frac{b \dot{\sigma}}{F \varphi' \epsilon_{eqv}^p} \xi_{ij}, \quad (\text{I.1.25})$$

где:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = P_{ijkl} \dot{s}_{kl}. \quad (\text{I.1.26})$$

Действительно, из гипотезы (I.1.5) следует:

$$\frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = \xi_{kl} \frac{\partial}{\partial s_{ij}} s_{ij} \delta_{ik} \delta_{jl} - \alpha_{kl} = \xi_{ij}. \quad (\text{I.1.27})$$

Отсюда, ассоциированный закон пластического течения (I.1.23) примет вид:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \xi_{ij}. \quad (\text{I.1.28})$$

Для производной по времени от функции нагружения справедливо:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \dot{s}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \dot{\chi}. \quad (\text{I.1.29})$$

Значение производной $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ получим из выражения (I.1.5):

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = -bF \quad (\text{I.1.30})$$

Подставляя (I.1.13), (I.1.16), (I.1.17), а также (I.1.26) - (I.1.28) в соотношение (I.1.29), получим выражение для $\dot{\lambda}$ в состоянии активного нагружения:

$$\dot{\lambda} = \frac{\xi_{ij} \dot{s}_{ij} - bF \dot{\sigma}}{F^2 \varphi' \epsilon_{eqv}^p}, \quad (\text{I.1.31})$$

откуда и следует справедливость уравнений (I.1.25).

Для *начально-изотропной* среды они могут быть представлены в более удобном для практических вычислений виде. В этом случае тензор P_{ijkl} из формулы (I.1.26)

пропорционален единичному тензору 4-го ранга $I_{ijkl} = \frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}$:

$$P_{ijkl} = \frac{1}{2\mu} I_{ijkl}, \quad (\text{I.1.32})$$

где μ - модуль сдвига. Для девиатора скоростей полной деформации будет выполняться:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \dot{\lambda} \xi_{ij}, \quad (\text{I.1.33})$$

или:

$$\dot{s}_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\lambda} \xi_{ij}. \quad (\text{I.1.34})$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (I.1.31), выразим из него $\dot{\lambda}$, как функцию $\dot{\epsilon}_{ij}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{\xi_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2\mu} bF \dot{\sigma}}{A}, \quad (\text{I.1.35})$$

где:

$$A = F^2 \left(1 + \frac{\varphi' \varepsilon_{eqv}^p}{2\mu} \right). \quad (\text{I.1.36})$$

Такой вид параметра $\dot{\lambda}$ позволяет из уравнения (I.1.34) получить определяющие соотношения модели для девиаторов тензоров:

$$\dot{s}_{ij} = 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\xi_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{1}{2\mu} bF \dot{\sigma}}{A} \xi_{ij} \right) = 2\mu \left(I_{ijkl} - \frac{\xi_{ij} \xi_{kl}}{A} \right) \dot{\epsilon}_{kl} + \frac{bF \dot{\sigma}}{A} \xi_{ij}. \quad (\text{I.1.37})$$

Объединяя их с гипотезой (I.1.24) для скорости изменения объемного напряжения $\dot{\sigma}$, получим уравнения состояния для процесса активного нагружения в полных тензорах:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl}^* \dot{\epsilon}_{kl} + \sigma_{ij}^* \\ C_{ijkl}^* &= 2\mu \left(I_{ijkl} - \frac{\xi_{ij} \xi_{kl}}{A} \right) + \left(K - \theta - \frac{2\mu}{3} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + K - \theta - \frac{bF \xi_{ij} \delta_{kl}}{A}. \\ \sigma_{ij}^* &= -K - \theta - g - \sigma - f^{st} - \theta \left(\delta_{ij} + \frac{bF \xi_{ij}}{A} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.1.38})$$

Как видно из соотношений (I.1.38), эта теория приводит к несимметричной краевой задаче, что возможно считать платой за физическую достоверность.

В модуле QUASISTATIC ПК GeomechanICS реализован частный случай линейного упрочнения, как по сдвигу, так и по объемному сжатию.

Пусть μ_t - модуль сдвига в области пластических деформаций, μ_p - секущий модуль:

$$\mu_p = \frac{\mu \mu_t}{\mu - \mu_t} \quad (\text{I.1.39})$$

Тогда параметр упрочнения по сдвигу имеет следующую форму (Шешенин С.В., [72]):

$$\varphi \varepsilon_{eqv}^p = 2\mu_p \varepsilon_{eqv}^p, \quad (\text{I.1.40})$$

и функции модели конкретизируются следующим образом:

$$\dot{\chi} = 2\mu_p \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p}, \quad \dot{\alpha}_{ij} = 2\mu_p (1 - \beta) \dot{\epsilon}_{ij}^p, \quad \varphi' \varepsilon_{eqv}^p = 2\mu_p \quad (\text{I.1.41})$$

Так выглядят зависимости $\sigma \sim \theta$ для предельных случаев медленного и быстрого нагружения для линейно-упрочняющегося материала, используемые в уравнении (I.1.24):

$$f^{st} \theta = \begin{cases} K\theta, & \theta \leq \theta_s^{st} \\ K - K_t^{st} \theta_s^{st} + K_t^{st} \theta, & \theta > \theta_s^{st} \end{cases}, \quad (I.1.42)$$

$$f^d \theta = \begin{cases} K\theta, & \theta \leq \theta_s^d \\ K - K_t^d \theta_s^d + K_t^d \theta, & \theta > \theta_s^d \end{cases},$$

где: K - модуль объемного сжатия в упругости, K_t^{st} , K_t^d - статический и динамический тангенциальные модули объемного сжатия в области пластических деформаций, а θ_s^{st} , θ_s^d - пределы упругости по объемному сжатию для статической и динамической диаграмм. Функция g из (I.1.24), характеризующая вязкость, задается в наиболее простом виде [26]:

$$g \sigma - f \theta = \frac{1}{\gamma} \langle \sigma - f^{st} \theta \rangle, \quad \langle \psi \rangle = \begin{cases} 0, & \psi \leq 0 \\ \psi, & \psi > 0 \end{cases} \quad (I.1.43)$$

где γ - объемная вязкость грунта.

3. Модель грунта, основанная на деформационной теории пластичности.

Определяющие соотношения грунта на основе деформационной теории пластичности можно получить как обобщение теории малых упруго-пластических деформаций А.А. Ильюшина [14, 33]. Именно, положим, что параметром функции пластичности Ильюшина ω будет не только ε_u - интенсивность деформаций: $\varepsilon_u = \sqrt{e_{ij} \cdot e_{ij}}$, но и объемные деформации θ (Победра Б.Е., Шешенин С.В. [33]). Связь девиаторов тензоров напряжений и деформаций при активном нагружении в этом случае сохранит классический вид [14]:

$$s_{ij} = \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} e_{ij}, \quad (I.1.44)$$

где интенсивность тензора напряжений $\sigma_u = \sqrt{s_{ij} \cdot s_{ij}}$ выражается через функционал универсальной кривой активной деформации $\Phi = 2\mu \cdot 1 - \omega \varepsilon_u, \theta \varepsilon_u$:

$$\sigma_u = \Phi \varepsilon_u, \theta \quad (I.1.45)$$

Дифференцируя соотношения (I.1.44) по времени, получим уравнение состояния для девиаторов тензоров в скоростях [33]:

$$\dot{s}_{ij} = 2\mu \cdot 1 - \omega \varepsilon_u, \theta \left(I_{ijkl} - \frac{\partial \omega \varepsilon_u, \theta}{\partial \varepsilon_u} \frac{e_{ij} e_{kl}}{\varepsilon_u} \right) \dot{e}_{kl} - 2\mu \frac{\partial \omega \varepsilon_u, \theta}{\partial \theta} e_{ij} \dot{\theta} \quad (I.1.46)$$

Объединяя зависимость (I.1.46) с уравнением для шаровых частей тензоров напряжений и деформаций (I.1.24), окончательно получим:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(2\mu \left\{ \frac{1 - \omega \left(I_{ijkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right)}{\partial \varepsilon_u} \frac{e_{ij} e_{kl}}{\varepsilon_u} - \frac{\partial \omega \varepsilon_u, \theta}{\partial \theta} e_{ij} \delta_{kl} \right\} + K \theta \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \dot{e}_{kl} + \sigma_{ij}^* \quad (I.1.47)$$

$$\sigma_{ij}^* = -K \theta g \sigma - f^{st} \theta \delta_{ij}$$

Заметим, что эти определяющие соотношения также не обладают свойством симметрии.

Как и в модели, построенной на основе теории пластического течения, в деформационной модели пластические деформации по сдвигу и по объемному сжатию могут начинаться независимо друг от друга. Критерий начала пластических деформаций по сдвигу, записанный в напряжениях, имеет вид:

$$\sigma_u^2 - F \sigma = 0, \quad F \sigma = \sigma_u^s + b \sigma^2. \quad (I.1.48)$$

Удобнее пользоваться этим критерием, переписав его в деформациях:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_u^s \theta, \quad \varepsilon_u^s \theta = \frac{\sigma_u^s + b \sigma}{2\mu}, \quad (I.1.49)$$

где ε_u^s - предел упругости по сдвигу, выраженный через интенсивность девиатора деформаций, σ_u^s - соответствующая ему интенсивность девиатора напряжений.

Пока условие (I.1.49) не выполнено, функция пластичности Ильюшина ω тождественно равна нулю. Как только равенство (I.1.49) достигнуто, вычисляется функция ω , ее производные $\frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_u}$, $\frac{\partial \omega}{\partial \theta}$, и пересчитываются определяющие соотношения (I.1.47). Кроме

того, с момента начала пластических деформаций по сдвигу вычисляется величина $\dot{\varepsilon}_u$. При выполнении условия начала разгрузки $\dot{\varepsilon}_u < 0$, запоминается новый предел упругости на сдвиг ε_u^s , равный текущему значению ε_u , а функция пластичности ω и ее производные снова полагаются равными нулю.

Условие пластичности по объемному сжатию здесь такое же, как и в модели по теории пластического течения.

В реализованном в модуле QUASISTATIC ПК GeomechanICS случае линейно упрочняющегося по сдвигу материала кривая активной деформации σ_u записывается следующим образом:

$$\sigma_u = 2\mu_t \varepsilon_u - \varepsilon_u^s \theta + 2\mu \varepsilon_u^s \theta \quad (I.1.50)$$

Сопоставляя это выражение с уравнением (I.1.45) для функционала $\Phi(\varepsilon_u, \theta)$, получим вид функции пластичности Ильюшина ω для линейно-упрочняющегося по сдвигу материала:

$$\omega(\varepsilon_u, \theta) = \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon_u^s \theta}{\varepsilon_u}\right) \quad (I.1.51)$$

Описание модели грунтов, используемой в модуле FILTRATION.

Для решения задач квазистатического деформирования пористого скелета и медленного течения насыщающей его жидкости под действием мало изменяющихся во времени внешних сил в ПК GeomechanICS предлагается использовать модуль FILTRATION. Опишем сначала объект исследования. Моделируется деформация грунтовой толщи, имеющей слоистую структуру, в которой высокопористые водоносные слои чередуются с малопористыми, с малой водопроницаемостью. Толщины поверхностных слоев грунта составляют метры и десятки метров и увеличиваются с глубиной. При этом водоносные слои состоят из скальных пород, известняков, механическое поведение которых при не слишком высоких нагрузках хорошо моделируется линейно-упругим законом. Слабо проводящие слои состоят из нескальных пород с мелкозернистой структурой. Это, как правило, глины. Тем не менее, это сильно сцементированные грунты, так же с линейно-упругим поведением. Они выступают в роли «запирающих» по отношению к водоносным. Верхний поверхностный слой грунта имеет рыхлую разрушенную структуру и уже при небольших нагрузках ведет себя как неупругий.

В этом классе задач также существует деление на задачи консолидации и задачи фильтрации. Под фильтрацией понимают процесс деформирования, вызванный откачкой жидкости из водоносных слоев грунта, под консолидацией – уплотнение грунта и

высачивание из него жидкости под действием поверхностных сил. Очевидно, что в задачах фильтрации слоистое строение грунта существенно.

Первая из известных моделей совместного деформирования грунта и течения насыщающей его жидкости принадлежала К. Терцаги, и использовалась им в задаче консолидации под действием силы тяжести. Он первым стал рассматривать водонасыщенный грунт как двухфазную среду. Им введено понятие эффективного напряжения, как среднего по малому объему напряжения в твердой фазе грунта при нулевом давлении в насыщающей его жидкости. Уравнения Терцаги были одномерными и учитывали только вертикальную компоненту вектора перемещения. Несмотря на такое упрощение, модель получила широкое применение в механике грунтов и используется до сих пор при вычислении осадки поверхности грунта, если возможно пренебречь горизонтальными деформациями.

Позднее появилась модель трехмерной консолидации М. Био, которая, с некоторыми обобщениями, является, пожалуй, наиболее используемой в теории фильтрации с самого момента своего появления и по настоящее время. Такую популярность модели Био в своем классе задач можно объяснить, по-видимому, удачным компромиссом между числом описываемых физических явлений (и, соответственно, используемых уравнений), и минимальным количеством задействованных при этом предположений и упрощений.

Модель грунтов, основанная на теории фильтрационной консолидации Био.

Предметом нашего рассмотрения будет гетерогенная двухфазная среда в малом представительном объеме V , состоящая из пористой или зернистой твердой фазы, называемой скелетом или каркасом и жидкости, заполняющей поры или промежутки между зернами. Поскольку диаметр пор достаточно мал и для разных грунтов структура заполнения объема V твердой фазой весьма различна, в модели Био используется подход теории смеси. А именно, считается, что в каждой точке объема существует вектор перемещения скелета \vec{u} и давление p в жидкости. Полное среднее напряжение $\bar{\sigma}^{\Pi}$ в такой среде:

$$\bar{\sigma}^{\Pi} = \langle \bar{\sigma} \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V \bar{\sigma} dV \quad (I.2.1)$$

определяется суммой осредненных микронапряжений в фазах:

$$\bar{\sigma}^{\Pi} = \frac{1}{V} \int_{V_{TB}} \bar{\sigma} dV + \frac{1}{V} \int_{V_{Ж}} \bar{\sigma} dV = \frac{1-n}{V_{TB}} \int_{V_{TB}} \bar{\sigma} dV + \frac{n}{V_{Ж}} \int_{V_{Ж}} \bar{\sigma} dV = (1-n) \langle \bar{\sigma} \rangle^{TB} + n \langle \bar{\sigma} \rangle^{Ж}, \quad (I.2.2)$$

где V_{TB} и $V_{Ж}$ - объемы, занимаемые соответственно твердой и жидкой фазами, n - объемная пористость:

$$n = \frac{V_{Ж}}{V}. \quad (I.2.3)$$

Постановку задачи будем проводить в предположении:

$$n = const \text{ по } \vec{x}. \quad (I.2.4)$$

В случае медленного течения жидкости, а именно к такому относится фильтрация, общепринято пренебрегать осредненным тензором вязких напряжений в жидкой фазе:

$$\langle \bar{\sigma} \rangle^{Ж} = -p \underline{I}, \quad (I.2.5)$$

где p - осредненное давление, \underline{I} - единичный тензор.

Введем в рассмотрение тензор эффективных напряжений $\bar{\sigma}^3$:

$$\bar{\sigma}^3 = (1-n) \left(\langle \bar{\sigma} \rangle^{TB} - \langle \bar{\sigma} \rangle^{Ж} \right), \quad (I.2.6)$$

который физически интерпретируется, как часть тензора средних напряжений $\langle \sigma \rangle^{TB}$ в скелете, обусловленная внешним макронагрузением, а не давлением p в жидкости. В таком случае, полное напряжение σ^{Π} из (I.2.2) с учетом (I.2.5) можно представить в виде:

$$\sigma^{\Pi} = \sigma^{\exists} - pI. \quad (I.2.7)$$

Если поры каркаса не полностью насыщены жидкостью, а мерой насыщения является величина α ($0 \leq \alpha \leq 1$), то добавив и вычтя из (I.2.2) член вида αpG , получим выражение для σ^{Π} в этом случае:

$$\sigma^{\Pi} = ((1-n)\langle \sigma \rangle^{TB} - (n-\alpha)pI) - \alpha pI = \sigma^{\exists} - \alpha pI. \quad (I.2.8)$$

Здесь, как и в случае полного насыщения, σ^{\exists} представляет полное напряжение в каркасе под действием совокупной внешней нагрузки при условии, что давление p равно нулю в той части объема пор, которая заполнена жидкостью. Коэффициент α , согласно [55], выражает отношение объема вытекшей жидкости к изменению объема пор скелета в случае, когда жидкость может беспрепятственно вытекать через поверхность тела. Таким образом, состоянию полного насыщения соответствует значение $\alpha = 1$, отсутствию жидкости в порах $\alpha = 0$.

Малая скорость фильтрации жидкости позволяет пренебречь инерционными слагаемыми в уравнениях движения фаз:

$$\begin{cases} \langle \sigma_{ij} \rangle^{TB}_{,j} + \rho^{TB} F_i = 0 \\ \langle \sigma_{ij} \rangle^{JK}_{,j} + \rho^{JK} F_i = 0 \end{cases}, \quad (I.2.9)$$

где ρ^{TB} и ρ^{JK} - плотности каркаса и жидкости, \vec{F} - постоянная во времени массовая сила. Здесь и далее для частной производной по координате будем использовать обозначение:

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_i} \equiv a_{k,i}.$$

Просуммировав уравнения (I.2.9), получим условие равновесия для полного напряжения σ^{Π} :

$$\left((1-n)\langle \sigma_{ij} \rangle^{TB} + n\langle \sigma_{ij} \rangle^{JK} \right)_{,j} + ((1-n)\rho^{TB} + n\rho^{JK})F_i = \sigma^{\Pi}_{ij,j} + \langle \rho \rangle F_i = 0. \quad (I.2.10)$$

Поскольку в модели Био интерес представляют не абсолютные значения искомых функций, а их приращения за время t действия внешней нагрузки, все уравнения в дальнейшем будем записывать в приращениях переменных относительно их статических значений, вызванных постоянной массовой силой \vec{F} . Тогда уравнение (I.2.10) примет вид:

$$\sigma^{\Pi}_{ij,j} = \sigma^{\exists}_{ij,j} - \text{grad}p = 0. \quad (I.2.11)$$

Предполагая, что для скелета выполняются соотношения линейной упругости, получим для σ^{\exists} :

$$\sigma^{\exists} = \zeta : \varepsilon^{\exists}, \quad (I.2.12)$$

где ζ - эффективный тензор модулей упругости, ε^{\exists} - эффективные малые деформации.

Определяющие соотношения этого типа используются при описании деформирования твердых и полутвердых грунтов, примерами которых в геомеханике могут служить граниты и известняки. Для мягких грунтов, имеющих зернистую структуру (песчаный грунт или глина, например), линейные определяющие соотношения годятся лишь при небольших уровнях напряжений. В зависимости от напряжений, получаемых в

задаче, может оказаться необходимым применять физически нелинейные уравнения состояния. Уравнения модели Био с использованием теорий вязко-упругости, упруго-пластичности и вязко-упругопластичности для грунта отражены в работах [23-25, 43, 51, 75]. Однако в классе задач фильтрации под действием откачки (закачки) жидкости из скважины в слоистых грунтах использование закона Гука (I.2.12) оправдано геологической структурой грунта. По смыслу самой задачи отбор жидкости осуществляется во флюидонасыщенном слое, всегда состоящим из твердых или полутвердых пород, в которых давление откачки не вызывает больших деформаций. Данный водоносный слой, как правило, перекрыт верхним и нижним так называемыми «запирающими» слоями с малой пористостью и, соответственно, малой насыщенностью жидкостью. Это их свойство приводит к малым деформациям как в них самих, так и в оставшихся внешних слоях грунта, поскольку «запирающие» горизонты существенно снижают перепад давлений, вызванный работой насосов во флюидоносном слое. Поэтому деформации верхних мягких слоев грунта также можно достаточно точно описывать законом Гука.

Подставляя (I.2.12) в выражение для полного напряжения (I.2.7), получим:

$$\underline{\sigma}^n = \underline{\zeta} : \underline{\varepsilon}^3 - p \underline{I}. \quad (\text{I.2.13})$$

Таким образом, ясен физический смысл тензора $\underline{\zeta}$, как эффективной жесткости насыщенного грунта при нулевом давлении жидкости в порах.

Для связи деформаций $\underline{\varepsilon}^3$ с осредненными перемещениями твердой фазы \bar{u} воспользуемся соотношениями Коши [14] для малых деформаций:

$$\varepsilon_{ij}^3 = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (\text{I.2.14})$$

Объединяя (I.2.11), (I.2.12) и (I.2.14), получим первое уравнение модели линейной фильтрации:

$$\left(C_{ijkl} u_{k,l} \right)_{,j} = p_{,i}. \quad (\text{I.2.15})$$

Для вывода второго уравнения модели воспользуемся законом Дарси [23, 63], выражающим линейную зависимость относительной скорости жидкости $\vec{w} = n(\vec{v} - \dot{\vec{u}})$ от градиента давления:

$$\vec{w} = - \frac{k}{\mu} (\vec{x}) \cdot \text{grad} p, \quad (\text{I.2.16})$$

Здесь \vec{v} и $\dot{\vec{u}}$ есть средние скорости жидкой и твердой фаз (точкой над символом обозначаем частную производную по времени), μ - коэффициент динамической вязкости жидкости (измеряемый в $\text{Па} \cdot \text{с}$), а коэффициент k (единицы измерения – м^2) носит название тензора проницаемости каркаса. Уравнение (I.2.16) было экспериментально получено А. Дарси в 1856 г. в опытах по течению жидкостей через цилиндрический слой песка для малых скоростей фильтрации. Предел применимости данного закона в зависимости от относительной скорости течения жидкости в числах Рейнольдса: $3 \leq \text{Re} \leq 10$. Закон Дарси

часто также записывают в виде: $\vec{w} = - \frac{k^*}{\rho^* g} (\vec{x}) \cdot \text{grad} p$, где k^* - тензорный коэффициент

фильтрации жидкости, измеряемый в $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, а $\rho^* g$ - вес единицы объема жидкости.

Заметим, что закон (I.2.16) может быть получен осреднением уравнения движения вязкой жидкости через поры линейно-упругого каркаса со стандартными условиями равенства напряжений и перемещений на поверхности раздела фаз. Данная процедура на

примере периодической среды осуществлена в [11]. В этой же работе получены оценки точности закона Дарси (I.2.16) для пор различной формы.

В общем случае, тензор проницаемости \underline{k} зависит от эффективной объемной деформации твердой фазы $\theta = \text{div} \vec{u}$ [3]:

$$\underline{k} = \underline{k}(\vec{x}, \theta), \quad (\text{I.2.17})$$

и уравнение (I.2.16) становится нелинейным. В качестве примера скалярной зависимости можно указать экспериментальную формулу [25]:

$$k = k_0 \left(\frac{n}{n_0} \right)^\alpha, \quad \alpha \approx 10,$$

где k_0 , n_0 - начальные проницаемость и пористость, а текущая пористость n выражается через θ с помощью уравнения неразрывности.

Далее, предполагая отсутствие массообмена между жидкостью и скелетом и наличие источников (стоков) жидкости плотности γ (размерность величины $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$), запишем уравнение сохранения фазовых масс:

$$\frac{d}{dt} (n \rho^{\text{ж}}) + n \rho^{\text{ж}} \text{div} \vec{v} = \gamma(\vec{x}, t), \quad (\text{I.2.18})$$

$$\frac{d}{dt} ((1-n) \rho^{\text{TB}}) + (1-n) \rho^{\text{TB}} \text{div} \dot{\vec{u}} = 0. \quad (\text{I.2.19})$$

Считая жидкость баротропной:

$$\frac{\rho^{\text{ж}}}{\rho_0^{\text{ж}}} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^\beta$$

с коэффициентом сжимаемости β , $\beta \leq 1$, дифференцированием по времени t получим:

$$\frac{1}{\rho^{\text{ж}}} \frac{d}{dt} \rho^{\text{ж}} = \beta \frac{1}{p} \frac{d}{dt} p \quad (\text{I.2.20})$$

Преобразуем (I.2.19) в уравнение для нахождения пористости:

$$\frac{d}{dt} n = (1-n) \left(\text{div} \dot{\vec{u}} + \frac{1}{\rho^{\text{TB}}} \frac{d}{dt} \rho^{\text{TB}} \right) \quad (\text{I.2.21})$$

Подставив в (I.2.18) выражения (I.2.20), (I.2.21) и закон Дарси, получим второе уравнение модели Био линейной фильтрации:

$$\text{div} \left(\frac{\underline{k}^*}{\rho^{\text{ж}} g} \cdot \text{grad} p \right) + G = \text{div} \dot{\vec{u}} + (1-n) \frac{1}{\rho^{\text{TB}}} \frac{d}{dt} \rho^{\text{TB}} + n \beta^* \dot{p}, \quad G \equiv \frac{\gamma}{\rho^{\text{ж}}}. \quad (\text{I.2.22})$$

Заметим, что полная производная $\frac{d}{dt} p$ в этой формуле заменена на частную \dot{p} в силу малости конвективной составляющей скорости изменения p . Обозначенная через $\beta^* = \frac{\beta}{p}$

относительная сжимаемость воды имеет значение порядка $5 \cdot 10^{-10} \text{ 1/Па}$.

Согласно предположению М. Био, сжимаемость зерен каркаса можно считать пропорциональной градиенту давления в жидкости:

$$\frac{1}{\rho^{\text{TB}}} \frac{d}{dt} \rho^{\text{TB}} = \chi \frac{d}{dt} p, \quad (\text{I.2.23})$$

откуда для уравнения (I.2.22) получим:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\underline{k}^*}{\rho^* g} \cdot \operatorname{grad} p \right) + G = \operatorname{div} \dot{\underline{u}} + n \beta^* \dot{p} + (1-n) \chi \dot{p} \quad (\text{I.2.24})$$

Но поскольку для многих грунтов $\chi \ll \beta$, материал скелета можно считать несжимаемым:

$$\chi = 0, \quad (\text{I.2.25})$$

что, однако, не запрещает объемные деформации твердой фазы в целом из-за наличия пор или способности к переупаковке зерен каркаса за счет их смещения. Поэтому, окончательно второе уравнение модели линейной фильтрации с учетом условия (I.2.25) примет вид:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\underline{k}^* (\vec{x}, \theta)}{\rho^* g} \cdot \operatorname{grad} p \right) + G = \operatorname{div} \dot{\underline{u}} + n \beta^* \dot{p}. \quad (\text{I.2.26})$$

Далее в тексте для удобства записи величину $\frac{\underline{k}^*}{\rho^* g}$ будем обозначать через \underline{k} , а β^* через β .

Уравнения (I.2.15) и (I.2.26) составляют связанную систему для описания совместного деформирования пористого скелета и фильтрации жидкости в нем:

$$\begin{cases} \left(C_{ijkl} \vec{x} u_{k,l} \vec{x}, t \right)_{,j} = p_{,i} \vec{x}, t \\ \left(k_{ij} \vec{x}, \theta p_{,i} \vec{x}, t \right)_{,j} + G \vec{x}, t = \dot{u}_{i,i} \vec{x}, t + n \vec{x} \beta \vec{x} \dot{p} \vec{x}, t \end{cases} \quad (\text{I.2.27})$$

Граничные и начальные условия, используемые в модуле FILTRATION ПК GeomechanICS.

Данные условия должны быть сформулированы как для скелета, так и для фильтрационного потока жидкости. Части границы Σ области V , на которых будем задавать краевые условия в перемещениях и напряжениях для каркаса, обозначим Σ^u и Σ^σ соответственно, а через Σ^p и Σ^w обозначим части границы, на которых следует задавать краевые значения для давления и относительной скорости жидкости. Пусть \vec{n} - вектор единичной нормали к Σ .

На элементе Σ^σ зададим поверхностную нагрузку \vec{S}^0 :

$$\underline{\sigma} \cdot \vec{n} = (\underline{\sigma} - p \underline{I}) \cdot \vec{n} = \left(C_{ijkl} u_{k,l} - p \delta_{ij} \right) n_j \vec{e}_i = \vec{S}^0. \quad (\text{I.2.28})$$

воспринимаемую как скелетом, так и жидкостью.

На элементе Σ^u зададим перемещение скелета \vec{U}^0 :

$$\vec{u} = \vec{U}^0. \quad (\text{I.2.29})$$

Для элемента Σ^w определим поток вектора относительной скорости жидкости через границу W^0 :

$$w_n = \vec{w} \cdot \vec{n} = -(\underline{k} \cdot \operatorname{grad} p) \cdot \vec{n} = W^0. \quad (\text{I.2.30})$$

И, наконец, на элементе границы Σ^p будем считать заданной величину давления P^0 :

$$p = P^0. \quad (\text{I.2.31})$$

Очевидно, что для корректности постановки задачи должны выполняться условия:

$$\Sigma^u \cup \Sigma^\sigma = \Sigma, \quad \Sigma^u \cap \Sigma^\sigma = \emptyset, \quad \Sigma^p \cup \Sigma^w = \Sigma, \quad \Sigma^p \cap \Sigma^w = \emptyset.$$

При этом возможные наложения элементов границы Σ^u и Σ^σ на элементы границы Σ^P и Σ^W будут соответствовать комбинациям различных краевых условий. Некоторые из них приведены в [11].

1. Условие типа «жидкий поршень»:

$$\vec{S}^0 = -P^0 \vec{n}, \quad p = P^0 \quad \text{на } \Sigma^\sigma, \quad (\text{I.2.32})$$

задающее нагружение этой части границы гидростатическим давлением величины P^0 .

2. Условие типа «непроницаемый поршень»:

$$\vec{S}^0 = -P^0 \vec{n}, \quad W^0 = 0 \quad \text{на } \Sigma^\sigma, \quad (\text{I.2.33})$$

задающее нагружение данной части границы жестким штампом с величиной удельной нагрузки P^0 .

3. Условие типа «высокопроницаемый поршень»:

$$\vec{S}^0 = -P^0 \vec{n}, \quad p = 0 \quad \text{на } \Sigma^\sigma, \quad (\text{I.2.34})$$

задающее нагружение только упругого каркаса нагрузкой P^0 .

Параметр массового отбора жидкости задается следующим образом. Рассмотрим область, такую что: $V_Q \cap \Sigma = \Sigma^Q$, $\Sigma^Q \subset \Sigma^W$ и зададим в ней функцию G из (I.2.22) удельной плотности источников (стоков) жидкости:

$$G(\vec{x}, t) = \begin{cases} G_Q(\vec{x}, t), & x \in V_Q \\ 0 & x \in V/V_Q \end{cases}. \quad (\text{I.2.35})$$

Зависимость G_Q от t выбирается в виде функции Хэвисайда:

$$\int_{V_Q} G_Q dV = Q \quad \text{при } t > t_0, \quad (\text{I.2.36})$$

где Q - расход источника (стока) в единицу времени (размерность $\frac{M^3}{c}$). Вместе с граничными условиями:

$$\vec{U}^0 = 0, \quad W^0 = 0 \quad \text{на } \Sigma^Q, \quad (\text{I.2.37})$$

соответствующими жесткой заделке части границы Σ^Q и отсутствию потока жидкости через неё, такое условие будет задавать откачку ($Q > 0$) или закачку ($Q < 0$) жидкости в объеме V_Q , начавшуюся в момент времени t_0 .

В силу того, что все искомые функции задачи записаны в приращениях, начальные условия, завершающие постановку краевой задачи, будут однородными:

$$\vec{u} = 0, \quad p = 0 \quad \text{при } t = t_0. \quad (\text{I.2.38})$$

Итак, модель линейной фильтрационной консолидации Био описывается уравнениями (I.2.27) с граничными условиями (I.2.28) - (I.2.31) и начальными условиями (I.2.38).

Описание модели грунтов, используемой в модуле THERMOELAST.

Данный модуль предназначен для вычисления изменяющихся совместно поля температур и деформаций в водонасыщенном грунте, с учетом возможных фазовых переходов поровой воды. Изменение температуры может быть связано как ее с сезонными колебаниями, так и дополнительным разогревом (охлаждением) на границе или внутри

объема грунта. Переход температуры через нулевое значение, то есть температуру замерзания-таяния воды в порах грунта, приводит задачу к постановке Стефана, в ходе которой необходимо определять движение границы раздела мерзлой и талой фаз грунта. Изменение фазового состояния грунта вызывает изменение поля деформаций и напряжений в нем. Задача решается, как физически квазилинейная, поскольку жесткость талой фазы обычно много меньше, чем жесткость мерзлой фазы [3], [4].

Модель грунтов, основанная на обобщенной формулировке Стефана задачи термоупругости.

Грунтовой массив с расположенным в нем сооружением моделируется слоистой двухфазной средой, занимающей объем V , каждый слой которой является однородным и, вообще говоря, анизотропным. Данная среда описывает поведение влагонасыщенного грунта, одна фаза которого находится в талом, а другая - в мерзлом состоянии. Как и в предыдущих моделях, рассматривается случай малых деформаций сплошной среды. Обозначим через \vec{x} радиус-вектор точек грунта, а через $T(\vec{x}, t)$ приращение температуры по отношению к ее начальному распределению $T_0(\vec{x})$.

Систему уравнений термоупругости, состоящую из уравнения Дюгамеля-Неймана и теплопроводности, позволяющую учесть скачок теплоемкости на фазовой границе, в так называемой обобщенной формулировке задачи Стефана можно записать в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) = \rho F_i + \alpha_v K \frac{\partial T}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_v = \alpha_v K T_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \rho c_{eff} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad i, j = 1, 2, 3 \end{cases}, \quad (I.3.1)$$

в которой через $C_{ijkl}(\vec{x}, T) = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ обозначен тензор модулей упругости грунта, $\alpha_v(\vec{x}, T)$ - коэффициент объемного теплового расширения грунта $\lambda_{ij} = \lambda(\vec{x}, T) \delta_{ij}$ - тензор теплопроводности грунта, $q_v(\vec{x})$ - мощность внутренних источников тепла в единице объема грунта, $\rho(\vec{x}, T)$ - плотность грунта, $c(\vec{x}, T)$ - удельная теплоемкость грунта, а через K и G обозначены модули объемного расширения (сжатия) и сдвига изотропного грунта. Конвективным переносом в сплошной среде можно пренебречь из-за малости скоростей движения точек среды. Поэтому в уравнениях (I.3.1) полная производная по времени t заменена на частную производную.

Пусть фазовые переходы в грунте происходят при известной постоянной температуре $T = T^*$. При наличии фазовых переходов необходимо задавать условие на температуру и ее градиент на границе $S(\vec{x}, t)$ раздела фаз. Данная граница разделяет область V на две подобласти: $V^{th} = \{(x, y, z) \in V, T(x, y, z) > T^*\}$, занятую талым грунтом, и $V^f = \{(x, y, z) \in V, T(x, y, z) < T^*\}$, занятую мерзлым грунтом. Будем использовать аналогичные обозначения и для термомеханических параметров в каждой фазе. Коэффициенты системы уравнений (I.3.1) являются разрывными функциями координат:

$$K, G, \alpha_v, \lambda_{ij}, q_v, \rho, c = \begin{cases} K^{th}, G^{th}, \alpha_v^{th}, \lambda_{ij}^{th}, q_v^{th}, \rho^{th}, c^{th}, \vec{x} \in V^{th} \\ K^f, G^f, \alpha_v^f, \lambda_{ij}^f, q_v^f, \rho^f, c^f, \vec{x} \in V^f \end{cases}. \quad (I.3.2)$$

Граница $S(\vec{x}, t)$ является подвижной и ее положение в каждый момент времени t заранее не известно. Запишем условия на границе S фазового перехода. На ней справедливо предположение о непрерывности поля температур [5]:

$$[T] = T^f(\vec{x}) - T^{th}(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in S. \quad (I.3.3)$$

Квадратными скобками обозначен скачок функции при переходе фазовой границы. Данное условие является однородным. Кроме него необходимо поставить условие для теплового потока на границе. В силу (I.3.2) естественно предполагать разрывность теплового потока на границе раздела фаз:

$$\left[\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i \right] = -L \dot{S}_n, \quad \vec{x} \in S, \quad (I.3.4)$$

где n_i - компонента единичной нормали к границе S , L - энтальпия фазового перехода, а \dot{S}_n - нормальная составляющая скорости движения границы фазового перехода. Задача решения в области V уравнения теплопроводности из (I.3.1) с разрывными коэффициентами из (I.3.2), граничными условиями сопряжения (I.3.3) и (I.3.4) на фазовой границе S и начальными и граничными условиями на внешней границе Σ области V является классической задачей Стефана. Следуя [5], включим неоднородное условие на границе раздела фаз (I.3.4) в само уравнение теплопроводности. Учтем сосредоточенную теплоемкость c_s дополнительным слагаемым в уравнении теплопроводности из системы (I.3.1):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_V - \delta_s L \dot{S}_n = \alpha_v K T_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (I.3.5)$$

в котором через δ_s обозначена поверхностная дельта-функция Дирака. Она определяется так, что для любой функции $A(\vec{x})$ выполнено:

$$\int_V \delta_s A(\vec{x}) dV = \int_S A(\vec{x}) d\Sigma.$$

В точках границы фазового перехода введем естественную ортонормированную систему координат (x', y', z') так, чтобы уравнение границы S приняло вид: $x' = x'_0$. Для скорости движения точек границы получим: $\dot{S}_n = dx'/dt$. Граничное условие для температуры в новых координатах примет вид: $T(x'_0, y', z') = T^*$. Откуда следует выражение:

$$\delta_s \dot{S}_n = \delta(x' - x'_0) \frac{dx'}{dt} = \delta(T - T^*) \frac{dT}{dt} \quad (I.3.6)$$

Пренебрегая конвективной составляющей в полной производной по времени в уравнении теплопроводности из (I.3.1), получим его в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_V = (\rho c + L \delta(T - T^*)) \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (I.3.7)$$

В уравнении (I.3.7) граница фазового перехода явно не присутствует. При этом теплота фазового перехода учитывается заданием так называемой эффективной теплоемкости c_{eff} :

$$c_{eff} = c + \rho^{-1} L \delta(T - T^*). \quad (I.3.8)$$

Уравнение теплопроводности в форме (I.3.8), позволяющее учесть условия (I.3.3) и (I.3.4) на фазовой границе, приводит к обобщенной формулировке задачи Стефана. Решаемая система уравнений является связанной. То есть при решении ее по шагам по времени на каждом шаге необходимо вычислять одновременно температуру T и перемещения \vec{u} . Из литературы [9] известно, что если поверхностная сила, приложенная к границе области, является медленно изменяющейся во времени, то деформационное слагаемое $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)$ в уравнении теплопроводности можно отбросить без заметного

влияния на решение. Это приводит к «развязыванию» уравнений упругости Дюгамеля-Неймана и теплопроводности и позволяет сначала решать уравнение теплопроводности на всем отрезке изменения времени. А затем определять перемещения в точках области, решая уравнение теории упругости с учетом уже найденной температуры. Таким образом, в модуле THERMOELAST кроме связанной постановки реализована возможность решать систему уравнений термоупругости в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) = \rho F_i + \alpha_v K \frac{\partial T}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \rho c_{eff} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad i, j = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (I.3.9)$$

Индекс eff в обозначении эффективной теплоемкости далее будем опускать.

Численная реализация задачи Стефана в обобщенной формулировке носит название метода сквозного счета, который был предложен в работах А.А. Самарского [5] и Б.М. Будака [6].

Граничные и начальные условия, используемые в модуле THERMOELAST ПК GeomechanICS.

Части внешней границы Σ области V , на которых будем задавать краевые условия первого рода (Дирихле) и третьего рода (Ньютона-Рихмана) для температуры, обозначим Σ^T и Σ^q соответственно.

Теплообмен с окружающей средой определим для элемента границы Σ^q :

$$\alpha \cdot q = \beta \cdot (T - T_{air}) - (\lambda \cdot grad T) \cdot \vec{n}, \quad (I.3.10)$$

где $\alpha(\vec{x}, t) \cdot q(\vec{x}, t)$ - поток вектора \vec{q} солнечной радиации через границу с коэффициентом поглощения α , $\beta(\vec{x}, t) \cdot (T - T_{air})$ - граничный теплообмен с воздухом, имеющим температуру T_{air} , с коэффициентом теплообмена β .

Температуру $\tilde{T}(t)$ будем считать заданной на элементе границы Σ^T :

$$T(t) = \tilde{T}. \quad (I.3.11)$$

Замыкают постановку задачи стандартные граничные условия на перемещения и начальные условия:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}, t) = 0, \quad \vec{x} \in \Sigma^u, \quad \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \alpha_v K T \delta_{ij} \right) n_j \vec{e}_i = \vec{S}^0, \quad \vec{x} \in \Sigma^\sigma. \\ \vec{u}(\vec{x}, 0) = 0, \quad T(\vec{x}, 0) = T_0(\vec{x}). \end{aligned} \quad (I.3.12)$$

Итак, модель квазилинейной термоупругости с фазовыми переходами в несвязанной постановке описывается системой (I.3.9) с граничными и начальными условиями (I.3.10) - (I.3.12). Для численного решения в связанной постановке используется система уравнения (I.3.1) с теми же граничными и начальными условиями.

Описание модели бетонов, используемой в ПК GeomechanICS.

Для всех трех модулей ПК GeomechanICS модель для бетонов также может быть выбрана как на основе теории течения, так и деформационной теории. Для бетона мы не учитываем влияние среднего гидростатического давления и вязкости по объемному сжатию, но учитываем влияние скорости деформирования на сдвиговые свойства. Вязкость бетона при сдвиге учитываем зависимостью радиуса поверхности текучести в (I.1.5) от скорости пластической деформации по формуле:

$$F_{\chi} = k_0 + \beta \chi \left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}_{eqv}^p}{\gamma_{concrete}} \right)^m. \quad (I.4.1)$$

Кроме этого, модель учитывает наличие арматуры. Поскольку концентрация арматуры n мала (не более 1%), то эффективные определяющие соотношения в направлении оси армирования x_{α} получаются по правилу смеси:

$$C_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{*sc} = n C_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{*steel} + (1-n) C_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{*concrete}. \quad (I.4.2)$$

Но поскольку при интенсивной динамической нагрузке арматура может испытывать пластические деформации, то вязкость следует учитывать не только для бетона, но и для прутьев арматуры. В [35] показано, что влияние скорости деформирования для арматуры существенно. Для арматуры, направленной вдоль оси x_{α} , используем одномерное определяющее соотношение, аналогичное соотношению (I.1.24):

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{E(\varepsilon_{\alpha\alpha})} \dot{\sigma}_{\alpha\alpha} + \frac{1}{\gamma_{steel}} \langle \sigma_{\alpha\alpha} - f_{steel}^{st}(\varepsilon_{\alpha\alpha}) \rangle \\ E(\varepsilon_{\alpha\alpha}) &= \frac{df_{steel}^d(\varepsilon_{\alpha\alpha})}{d\varepsilon_{\alpha\alpha}} \end{aligned} \quad (I.4.3)$$

Определяющие соотношения модели, как для грунта, так и для бетона, можно представить в едином виде:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^* \dot{\varepsilon}_{kl} + \sigma_{ij}^* \quad (I.4.4)$$

Для удобства изложения, запишем уравнения движения в скоростях:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \rho_0 \dot{F}_i = \rho_0 \dot{a}_i, \quad (I.4.5)$$

где F_i , a_i - компоненты векторов массовых сил и ускорения.

Принимая для тензора ε соотношения Коши для малых деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (I.4.6)$$

где для производной по координате используется обозначение: $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j}$, получим

уравнения движения сплошной среды в скоростях перемещений, вместе с граничными условиями первого рода на части границы Σ_u и второго рода на части границы Σ_{σ} , составляющими следующую краевую задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{ijkl}^* \vec{u}_{k,l} + \sigma_{ij,j}^* \vec{u} + \rho_0 \dot{F}_i = \rho_0 \dot{a}_i \vec{u} \\ \dot{u}_i|_{\Sigma_u} = \dot{u}_i^0 \\ C_{ijkl}^* n_j \vec{u}_{k,l} + \sigma_{ij}^* \vec{u} n_j|_{\Sigma_\sigma} = \dot{S}_i^0, \quad i=1,2,3 \end{array} \right. . \quad (\text{I.4.7})$$

Вариационная задача и ее дискретный аналог.

Вариационную постановку для всех трех рассматриваемых модулей в ПК GeomechanICS опишем на примере задачи фильтрационной консолидации. Задача термоупругости имеет аналогичную вариационную постановку в силу математической идентичности задачи фильтрационной консолидации. Тогда, как класс задач из модуля QUASISTATIC является частным случаем задачи фильтрационной консолидации.

Вопрос о поиске слабого решения квазистатической задачи фильтрации в переменных $\vec{u}(\vec{x}, t), p(\vec{x}, t)$, как экстремали для некоторого функционала, является открытым. Мы обойдем проблему построения функционала для квазистатической задачи фильтрации, используя вариационный метод Галеркина. Для записи уравнений в инвариантной форме будем использовать понятие тензора дисторсии:

$$Grad \vec{u} = \vec{\nabla} \otimes \vec{u} = \nabla_i u_j \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j, \quad \vec{\nabla} = \nabla_i \cdot \vec{e}^i, \quad (I.5.1)$$

и дивергенции от тензора [29]:

$$Div \vec{\sigma} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = \nabla_i \sigma_{ij} \vec{e}^j \quad (I.5.2)$$

где ∇_i - ковариантная производная по i -й координате в базисе \vec{e}^i , \vec{e}^i - взаимный базис к локальному \vec{e}_i .

Введем в рассмотрение функциональные множества H_u и H_p , состоящие из элементов пространства W_2^1 , удовлетворяющих заданным граничным условиям 1-го рода:

$$H_u = \left\{ \vec{h} \mid \vec{h} \in W_2^1, \vec{h}|_{\Sigma^u} = \vec{U}^0 \right\}, \quad (I.5.3)$$

$$H_p = \left\{ q \mid q \in W_2^1, q|_{\Sigma^p} = P^0 \right\}. \quad (I.5.4)$$

Через W_2^1 обозначено пространство Соболева функций $\vec{u}(\vec{x}, t)$:

$$W_2^1 = \left\{ \vec{u}(\vec{x}, t) \mid \vec{u}(\vec{x}, t) \in L_2, Grad \vec{u}(\vec{x}, t) \in L_2, \vec{x} \in V, \text{ для любого } t \in [t_0, t] \right\},$$

со скалярным произведением:

$$(\vec{u}, \vec{h})_{W_2^1} = \int_V (\vec{u} \cdot \vec{h} + Grad \vec{u} : Grad \vec{h}) dV,$$

а через L_2 - гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций, со скалярным произведением:

$$(\vec{u}, \vec{h})_{L_2} = \int_V \vec{u} \cdot \vec{h} dV, \text{ и нормой: } \|\vec{u}\|_{L_2} = (\vec{u}, \vec{u})_{L_2}^{\frac{1}{2}}.$$

Стандартными преобразованиями дифференциальные уравнения (I.2.27) задачи фильтрационной консолидации приводятся к виду:

$$\int_V Grad \vec{h} : \vec{\zeta} : Grad \vec{u} dV + \int_V \vec{h} \cdot grad p dV = \int_{\Sigma^\sigma} \vec{h} \cdot (\vec{S}^0 + p \vec{v}) d\Sigma, \quad (I.5.5)$$

$$\int_V grad q \cdot \vec{k} \cdot grad p dV + \int_V q (div \vec{u} + n \beta \dot{p}) dV - \int_V q G dV = - \int_{\Sigma^w} q W^0 d\Sigma. \quad (I.5.6)$$

Следуя [10, 27, 32], назовём обобщенным решением исходной краевой задачи (I.2.27), (I.2.28) - (I.2.31), (I.2.38) пару функций $\vec{u}(\vec{x}, t) \in H_u, p(\vec{x}, t) \in H_p$, удовлетворяющих выражениям (I.5.5), (I.5.6) для каждой пары функций $\vec{h}(\vec{x}, t) \in H_u^0, q(\vec{x}, t) \in H_p^0$ для каждого $t \in [t_0, T]$.

Пространственная дискретизация МКЭ и конечно-разностная аппроксимация по времени.

Необходимым шагом в построении численного решения вариационной задачи является процедура дискретизации, проводить которую по независимым переменным (координатам \vec{x} и времени t), согласно принципу последовательной дискретизации, можно независимо. Осуществим дискретизацию по координатам рассматриваемой задачи (I.5.5), (I.5.6) с помощью метода конечных элементов, а производную по времени аппроксимируем конечной разностью.

Рассмотрим N - мерные подпространства $H_u^N \subset H_u^0$ и $H_p^N \subset H_p^0$ бесконечномерных функциональных пространств с однородными главными краевыми условиями. Согласно методу Галеркина [32, 33], функции $\vec{u}^N(\vec{x}, t) \in H_u^N$ и $p^N(\vec{x}, t) \in H_p^N$ будут приближенным решением уравнений (I.5.5), (I.5.6), если при каждом $t > 0$ и при всех $\vec{h}^N(\vec{x}, t) \in H_u^N$ и $q^N(\vec{x}, t) \in H_p^N$ будут удовлетворять уравнениям:

$$\int_V Grad \vec{h}^N : \zeta : Grad \vec{u}^N dV = - \int_V \vec{h}^N \cdot grad p^N dV + \int_{\Sigma^\sigma} \vec{h}^N \cdot \vec{S}^0 d\Sigma. \quad (I.5.7)$$

$$- \int_V grad q^N \cdot \underline{k} : grad p^N dV + \int_V q^N G dV = \int_V q^N (div \dot{\vec{u}}^N + n\beta \dot{p}^N) dV + \int_{\Sigma^w} q^N W^0 d\Sigma. \quad (I.5.8)$$

Выберем в пространстве H_u^N базис из скалярных функций φ_I , $I=1, \dots, N$, и в пространстве H_p^N - базис ψ_I , $I=1, \dots, N$. Воспользуемся разложением искомых функций по базису (для суммирования по базису используем индексы из заглавных букв):

$$\vec{u}^N(\vec{x}, t) = \sum_{I=1}^N \vec{U}^I(t) \varphi_I(\vec{x}), \quad (I.5.9)$$

$$\vec{h}^N(\vec{x}, t) = \sum_{I=1}^N \vec{H}^I(t) \varphi_I(\vec{x}), \quad (I.5.10)$$

$$p^N(\vec{x}, t) = \sum_{I=1}^N P^I(t) \psi_I(\vec{x}). \quad (I.5.11)$$

$$q^N(\vec{x}, t) = \sum_{I=1}^N Q^I(t) \psi_I(\vec{x}), \quad (I.5.12)$$

Знак \sum при суммировании по повторяющимся индексам в дальнейшем будем опускать.

Преобразуем левую часть уравнения (I.5.7) с учетом соотношений (I.5.9) - (I.5.12):

$$\begin{aligned} \int_V Grad \vec{h}^N : \zeta : Grad \vec{u}^N dV &= \int_V \nabla_i h_j^N C^{ijkl} \nabla_k u_l^N dV = \\ &= \int_V \left(H_j^I \nabla_i \varphi_I \right) C^{ijkl} \left(U_l^J \nabla_k \varphi_J \right) dV = H_j^I \left(\int_V \nabla_i \varphi_I C^{ijkl} \nabla_k \varphi_J dV \right) U_l^J. \end{aligned} \quad (I.5.13)$$

Аналогично для правой части уравнения (I.5.7) получим:

$$\begin{aligned} - \int_V \vec{h}^N \cdot grad p^N dV + \int_{\Sigma^\sigma} \vec{h}^N \cdot \vec{S}^0 d\Sigma &= \\ &= - H_j^I \left(\int_V \varphi_I g^{kj} \nabla_k \psi_J dV \right) P^J + H_j^I \left(\int_{\Sigma^\sigma} \varphi_I g^{kj} S_k^0 d\Sigma \right) \end{aligned} \quad (I.5.14)$$

Введем обозначения:

$$L_{IJ}^{jl} = \int_V \nabla_i \varphi_I C^{ijkl} \nabla_k \varphi_J dV, \quad (I.5.15)$$

$$M_{IJ}^j = - \int_V \varphi_I g^{kj} \nabla_k \psi_J dV, \quad (I.5.16)$$

$$N_I^j = \int_{\Sigma^\sigma} \varphi_I g^{kj} S_k^0 d\Sigma. \quad (I.5.17)$$

Величины L_{IJ}^{jl} , M_{IJ}^j , N_I^j , где $I, J = 1, \dots, N$, $j, l = 1, \dots, n$ (n - размерность исходной задачи), являются элементами соответствующих матриц $[L]_{nN \times nN}$, $[M]_{nN \times N}$, $[N]_{nN \times 1}$. Объединяя соотношения (I.5.13), (I.5.14) и учитывая обозначения (I.5.15) - (I.5.17) получим конечномерный аналог уравнения (I.5.7):

$$H_j^I L_{IJ}^{jl} U_l^J = H_j^I M_{IJ}^j P^J + H_j^I N_I^j.$$

Поскольку данное уравнение должно выполняться для произвольной функции $\tilde{h}^N(\vec{x}, t) \in H_u^N$, окончательно получаем:

$$L_{IJ}^{jl} U_l^J = M_{IJ}^j P^J + N_I^j, \quad I = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n. \quad (I.5.18)$$

Матрица $[L_{IJ}^{kl}]$ определяет оператор L_V^N , являющийся на множестве H_u^N аналогом оператора теории упругости L_V . Поэтому L_V^N обладает теми же свойствами, что и L_V : согласно (I.5.15) он симметричен, а при выполнении условия положительности касательного модуля – положительно определен. Отсюда следует, что существует обратный оператор l_V^N , и уравнение (I.5.18) можно разрешить относительно функции \tilde{U}^I :

$$U_i^K = T_{iJ}^K P^J + l_{im}^{KJ} N_J^m, \quad (I.5.19)$$

где через T_{iJ}^K обозначена свертка $l_{ij}^{KI} M_{IJ}^j$.

Рассмотрим уравнение (I.5.8). Согласно представления (I.5.9) и (I.5.11):

$$\begin{aligned} & - \int_V \text{grad}(\mathcal{Q}^I \psi_I) \cdot \underline{k} \cdot \text{grad}(P^J \psi_J) dV + \int_V \mathcal{Q}^I \psi_I G dV = \\ & = \int_V \mathcal{Q}^I \psi_I (\text{div}(\dot{U}^J \varphi_J) + n\beta \dot{P}^J \psi_J) dV + \int_{\Sigma^w} \mathcal{Q}^I \psi_I W^0 d\Sigma, \end{aligned}$$

или, вынося $\mathcal{Q}^I(t)$ из-под знака интеграла и вводя обозначения:

$$A_{IJ} = - \int_V \nabla_i \psi_I k^{ij} \nabla_j \psi_J dV, \quad (I.5.20)$$

$$C_{IJ}^k = \int_V \psi_I g^{kj} \nabla_j \varphi_J dV, \quad (I.5.21)$$

$$D_{IJ} = \int_V n\beta \psi_I \psi_J dV, \quad (I.5.22)$$

$$f_I = \int_V G \psi_I dV - \int_{\Sigma^w} W^0 \psi_I d\Sigma, \quad (I.5.23)$$

для уравнения (I.5.8) окончательно получим:

$$A_{IJ} P^J = C_{IJ}^k \dot{U}_k^J + D_{IJ} \dot{P}^J - f_I. \quad (I.5.24)$$

Для цилиндрической системы координат в осесимметричном случае выражения (I.5.15) - (I.5.17) и (I.5.20) - (I.5.23) примут вид:

$$\begin{aligned}
 L_{IJ}^{11} &= \int_{V_1} \left\{ r^2 C^{1111} \left(r \varphi_I \varphi_J + \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} \frac{\partial \varphi_J}{\partial r} \right) + r^2 C^{1122} \left(\varphi_I \frac{\partial \varphi_J}{\partial r} + \varphi_J \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} \right) + r C^{1313} \frac{\partial \varphi_I}{\partial z} \frac{\partial \varphi_J}{\partial z} \right\} dr dz, \\
 L_{IJ}^{13} &= \int_{V_1} r C^{1133} \left(r \varphi_I \frac{\partial \varphi_J}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} \frac{\partial \varphi_J}{\partial z} \right) dr dz, \quad L_{IJ}^{31} = \int_{V_1} r C^{1133} \left(r \varphi_J \frac{\partial \varphi_I}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} \frac{\partial \varphi_J}{\partial z} \right) dr dz, \\
 L_{IJ}^{33} &= \int_{V_1} \left(r C^{1313} \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} \frac{\partial \varphi_J}{\partial r} + r C^{3333} \frac{\partial \varphi_I}{\partial z} \frac{\partial \varphi_J}{\partial z} \right) dr dz,
 \end{aligned} \tag{I.5.25}$$

$$M_{IJ}^1 = - \int_{V_1} r \varphi_I \frac{\partial \psi_J}{\partial r} dr dz, \tag{I.5.26}$$

$$M_{IJ}^3 = - \int_{V_1} r \varphi_I \frac{\partial \psi_J}{\partial z} dr dz, \tag{I.5.27}$$

$$N_I^1 = \int_{\Sigma_1^\sigma} r \varphi_I S_1^0 dr dz, \quad N_I^3 = \int_{\Sigma_1^\sigma} r \varphi_I S_3^0 dr dz, \tag{I.5.28}$$

$$A_{IJ} = - \int_{V_1} r \left(\frac{\partial \psi_I}{\partial r} k^{11} \frac{\partial \psi_I}{\partial r} + \frac{\partial \psi_I}{\partial z} k^{33} \frac{\partial \psi_I}{\partial z} \right) dr dz, \tag{I.5.29}$$

$$C_{IJ}^1 = \int_{V_1} \psi_I \left(r \frac{\partial \varphi_J}{\partial r} + \varphi_J \right) dr dz, \quad C_{IJ}^3 = \int_{V_1} r \psi_I \frac{\partial \varphi_J}{\partial z} dr dz, \tag{I.5.30}$$

$$D_{IJ} = \int_{V_1} m \beta \psi_I \psi_J dr dz, \tag{I.5.31}$$

$$f_I = \int_{V_1} r G \psi_I dr dz - \int_{\Sigma_1^w} r W^0 \psi_I d\Sigma. \tag{I.5.32}$$

Уравнения (I.5.18), (I.5.24) задачи фильтрации можно представить в матричной записи. Так, например, для осесимметричного случая введем вектор - столбцы неизвестных и правых частей уравнений:

$$\{ \vec{X}^J \} = \begin{Bmatrix} U_1^J \\ U_3^J \\ P^J \end{Bmatrix}, \quad \{ \vec{R}_J \} = \begin{Bmatrix} N_J^1 \\ N_J^3 \\ -f_J \end{Bmatrix} \tag{I.5.33}$$

и матрицу $[H]$:

$$[H_{IJ}] = \begin{pmatrix} L_{IJ}^{11} & L_{IJ}^{13} & -M_{IJ}^1 \\ L_{IJ}^{31} & L_{IJ}^{33} & -M_{IJ}^3 \\ -C_{IJ}^1 \frac{\partial}{\partial t} & -C_{IJ}^3 \frac{\partial}{\partial t} & -A_{IJ} - D_{IJ} \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}. \tag{I.5.34}$$

Тогда уравнения (I.5.18), (I.5.24) запишутся в виде системы матричных уравнений:

$$[H_{IJ}] \{ \vec{X}^J \} = \{ \vec{R}_I \}, \quad I = 1, \dots, N. \tag{I.5.35}$$

Если под областью интегрирования понимается канонический конечный элемент, то уравнения (I.5.34) представляют собой стандартные для МКЭ уравнения квазистатического равновесия на локальной области.

Построим на временной оси равномерную сетку $\omega_\tau = t_m | t_m = \tau m, \tau = const, m = 0, 1, 2, \dots$. Заменим входящие в матрицу H

производные $\frac{\partial}{\partial t}$ конечно-разностным соотношением $\frac{\dot{u}^{n+1} - \dot{u}^n}{\tau}, n = 0, 1, 2, \dots$.

После осуществленной таким образом дискретизации по времени t , задача (I.5.34) будет представлять собой систему линейных алгебраических уравнений относительно вектор-столбца $\{\vec{X}\}$ перемещений скелета грунта и давлений жидкости в его порах в узловых точках конечных элементов.

Дискретизация по времени, используемая в модуле QUASISTATIC ПК GeomechanICS.

Отдельно стоит вопрос о методе дискретизации по времени, используемом в модуле QUASISTATIC, поскольку порядок производной в уравнениях ее моделей - второй. Заметим, что такая дискретизация может быть проведена не единственным образом.

1. Явная схема по времени, используемая в модуле QUASISTATIC.

Отнеся скорость тензора напряжения и все входящие в его выражение (I.4.4) величины к n -му слою по времени, получим, независимо от дискретизации скорости массовых сил $\dot{\vec{F}}$ и производной по времени от ускорения $\dot{\vec{a}}$, нелинейную задачу в перемещениях. Такой подход хорош тем, что не привносит дополнительной ошибки по времени в численное решение. Если дополнительно отнести величину $\dot{\vec{a}}$ к $n+1$ -му временному слою, то такая расчетная схема будет явной по времени:

$$C_{ijkl}^* \dot{u}_{k,l}^n + \sigma_{ij,j}^* + \rho_0 \dot{F}_i^n = \rho_0 \dot{a}_i^{n+1} \quad (\text{I.6.1})$$

Нелинейность в уравнении (I.6.1) можно преодолеть итерационным алгоритмом вычислений, а возможность явно, без обращения матрицы C^* , получить решение \dot{u}^{n+1} , очевидным образом упрощает расчетную схему.

2. Неявная схема по времени, используемая в модуле QUASISTATIC.

Линеаризуем уравнения состояния (I.4.4) с помощью прямого метода Эйлера:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{n+1} = C_{ijkl}^* \dot{\varepsilon}_{kl}^{n+1} + \sigma_{ij}^* \quad (\text{I.6.2})$$

Уравнение (I.6.2) аппроксимирует соотношения (I.4.4) с порядком $O(\Delta t)$.

Перейдя от производной по времени к соотношению в приращениях относительно Δt , получим из (I.6.2):

$$\Delta \sigma_{ij}^{n+1} = C_{ijkl}^* \Delta \varepsilon_{kl}^{n+1} + \sigma_{ij}^* \Delta t, \quad \Delta \sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^{n+1} - \sigma_{ij}^n \quad (\text{I.6.3})$$

Дискретизируем уравнения движения сплошной среды вместе с граничными условиями первого рода на части границы Σ_u и второго рода на части границы Σ_σ , так чтобы получить линеаризованную неявную схему для краевой задачи в приращениях на $n + 1$ -м слое по времени:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^* \Delta u_{k,l}^{n+1} + \sigma_{ij,j}^* \Delta t + \rho_0 \Delta F_i^{n+1} &= \rho_0 \Delta a_i^{n+1} \\ \Delta u_i^{n+1} \Big|_{\Sigma_u} &= \Delta u_i^0 \quad n+1 \\ C_{ijkl}^* \Delta u_{k,l}^{n+1} + \sigma_{ij,j}^* \Delta t \Big|_{\Sigma_\sigma} &= \Delta S_i^0 \quad n+1, \quad i=1,2,3 \end{aligned} \quad (I.6.4)$$

Немаловажным является вопрос о выборе аппроксимации для приращения вектора ускорения Δa_i^n . Необходимо удовлетворить двум требованиям: во-первых: сохранить свойство безусловной устойчивости расчетной схемы по времени и, во-вторых: выражая Δa_i^n через приращения вектора перемещений Δu_i обойтись 2-х точечным шаблоном на сетке по времени t . Этим условиям удовлетворяет метод Ньюмарка.

В очевидных выражениях для скорости v_i^n и ускорения a_i^n :

$$\begin{aligned} v_i^n &= \dot{u}_i^n \\ a_i^n &= \dot{v}_i^n \end{aligned} \quad (I.6.5)$$

заменим производные их разностными аналогами с «весами» α и δ (константы схемы Ньюмарка):

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} &= v_i^n + (1 - \delta) a_i^n + \delta a_i^{n+1} \Delta t \\ u_i^{n+1} &= u_i^n + v_i^n \Delta t + \left(\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) a_i^n + \alpha a_i^{n+1} \right) \Delta t^2 \end{aligned} \quad (I.6.6)$$

Из второго уравнения в (I.6.6) можно выразить величину a_i^{n+1} :

$$a_i^{n+1} = A_1 u_i^{n+1} - u_i^n - A_2 v_i^n - A_3 a_i^n \quad (I.6.7)$$

с константами Ньюмарка A_1, A_2, A_3 :

$$A_1 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad A_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, \quad A_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \quad (I.6.8)$$

Подставим выражение (I.6.7) в уравнение движения сплошной среды для $n + 1$ -го слоя по времени:

$$\sigma_{ij,j}^{n+1} - \rho_0 A_1 \Delta u_i^{n+1} + \rho_0 A_2 v_i^n + \rho_0 F_i^{n+1} + \rho_0 A_3 a_i^n = 0 \quad (\text{I.6.9})$$

Вычтем из него уравнение движения для n -го слоя:

$$\sigma_{ij,j}^n + \rho_0 F_i^n - \rho_0 a_i^n = 0 \quad (\text{I.6.10})$$

Результирующее уравнение с начальными условиями на функции v_i^0 , a_i^0 примет вид:

$$\left(C_{ijkl}^{*n} \Delta u_{k,l}^{n+1}, j - \rho_0 A_1 \Delta u_i^{n+1} \right) + \rho_0 \Delta F_i^{n+1} + \sigma_{ij,j}^{*n} \Delta t + \rho_0 A_2 v_i^n + \rho_0 A_3 a_i^n = 0, \quad n=0,1,2,\dots, \quad (\text{I.6.11})$$

в котором скорости v_i^n , ускорения a_i^n и перемещения u_i^n аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_i^{n+1} &= A_1 \Delta u_i^{n+1} - A_2 v_i^n - A_3 a_i^n \\ v_i^{n+1} &= v_i^n + (1 - \delta) a_i^n + \delta a_i^{n+1} \Delta t \\ u_i^{n+1} &= u_i^n + v_i^n \Delta t + \left(\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) a_i^n + \alpha a_i^{n+1} \right) \Delta t^2 \end{aligned} \quad (\text{I.6.12})$$

Таким образом, при использовании схемы Ньюмарка в начально-краевой задаче на приращение вектора перемещений $\Delta \vec{u}^n$, стандартные начальные условия на вектора перемещения и скорости трансформируются в начальные условия на вектора скорости и ускорения. Для вычисления конечных перемещений \vec{u} по третьему уравнению в формуле (I.6.12) необходимо, очевидно, знать и начальные перемещения \vec{u}^0 .

Деформации и напряжения на $n+1$ -м шаге по времени находятся по формулам:

$$\varepsilon_{kl}^{n+1} = \varepsilon_{kl}^n + \frac{1}{2} \Delta u_{k,l}^{n+1} + \Delta u_{l,k}^{n+1}, \quad \sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + \Delta \sigma_{ij}^{n+1} \quad (\text{I.6.13})$$

Безусловная устойчивость схемы Ньюмарка имеет место при следующих условиях на константы схемы:

$$\delta = \frac{1}{2} + \gamma, \quad \alpha \geq \frac{1}{4} (1 + \gamma^2), \quad \gamma > 0.$$

Литература.

1. Аникеев А. В., Артамонова Н.Б., Калинин, Э.В. Некоторые особенности деформирования и разрушения горных пород при техногенном изменении режима подземных вод. // Геоэкология, № 3, 2000.- С. 249-256.
2. Артамонова Н.Б. Экспериментальное обоснование расчетных параметров и исследование напряженно-деформированного состояния флюидонасыщенных слоистых материалов на основе модели Био. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата геолого-минералогических наук. М., 2004.

3. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 208 с.
4. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир. – 1987. – 542 с.
5. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. М.: Высшая школа, 1978, 447 с.
6. Герсеванов Н.М., Польшин Д.Е. Теоретические основы механики грунтов и их практическое применение. М., Стройиздат, 1948.
7. Григорян С.С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, т.24, 1960. - с. 1057-1072.
8. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений. – М.: Мир. – 1987. – 542 с.
9. Друккер Л., Прагер В. Механика грунтов и пластический анализ или предельное состояние. В кн.: Определяющие законы механики грунтов. М.: «Мир», 1975, с. 166-177.
10. Дьяконов Е.Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач. – М.: Наука. – 1989. – 272 с.
11. Егоров А.Г., Костерин А.В., Скворцов Э.В. Консолидация и акустические волны в насыщенных пористых средах. – Казань: Изд-во Казанского Ун-та. – 1990. – 102 с.
12. Замышляев Б.В., Евтерев Л.С. Модели динамического деформирования и разрушения грунтовых сред. М.: Наука, 1990. – 215 с.
13. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир. – 1975. – 541 с.
14. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ. – 1990. – 310 с.
15. Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963, 270 с.
16. Керчман В.И. Задачи консолидации и связанной термоупругости для деформируемого полупространства. // Изв. АН СССР, МТТ. – 1976. - № 1.
17. Кондауров В.И., Никитин Л.В. Теоретические основы реологии геоматериалов. - М.: Наука, 1990. - 207 с.
18. Кукуджанов В.Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред. // Успехи механики. 1985. 8, вып. 4, с. 21-65.
19. Кулинич Ю.В., Нарожная З.В., Рыков Г.В. Механические характеристики песчаных и глинистых грунтов с учетом их вязкопластических свойств при кратковременных динамических нагрузках. М.: ИПМ АН СССР, 1976, препринт №69, 96 с.
20. Максимов В.Ф. Численное решение трехмерной задачи пробивания тонкой упругопластической преграды// Волновые задачи механики деформируемых сред. Ч. 1. - М.: Изд-во МГУ, 1990. - С.44-54
21. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа. – 1977. – 431 с.
22. Михлин С.Г. Спектр пучка операторов теории упругости. // Успехи математич. наук. – 1973. – Т. 28. - № 3. – С. 43-82.
23. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
24. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. – М.: Недра, 1984. – 232 с.
25. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. – М.: Недра, 1970. – 320 с.
26. Новацкий В.К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Изд-во «Мир», 1978, 307 с.
27. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. - М.: Изд-во МГУ. – 1990. – 311 с.
28. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. – М.: Мир. – 1988. – 411 с.

29. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. - М.: Изд-во Моск. ун-та. - 1974.
30. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Изд-во Моск. ун-та. - 1984. - 336 с.
31. Победря Б.Е. О связанных задачах механики сплошной среды. // Упругость и неупругость. Вып. 2 М.: Изд-во Моск. ун-та. - 1971. - с. 224-231.
32. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. - М.: Изд-во Моск. Ун-та. - 1981.
33. Победря Б.Е., Шешенин С.В., Холматов Т. Задача в напряжениях. - Ташкент: ФАН, 1988. - 197 с.
34. Полубаринова-Кочина П.Я. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (за 50 лет). - М.: Наука. - 1969.
35. Попов Н.Н., Расторгуев Б.С. Динамический расчет железобетонных конструкций. М.: Стройиздат. - 1974. - 207 с.
36. Рыков Г.В., Скобеев А.М. Измерение напряжений в грунтах при кратковременных нагрузках. М.: «Наука», 1978, 168 с.
37. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука. - 1989. - 616 с.
38. Терцаги К. Теория механики грунтов. - М.: Госстройиздат, 1961. - 507 с.
39. Тухватуллина А.В., Кантур О.В. Математические модели деформирования мягких грунтов. В кн.: Совершенствование методов расчета и конструкций подземных сооружений. М.: 26 ЦНИИ МО РФ, 2000 г.
40. Федоренко Р.П. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений. // Успехи мат. наук. - Том 28. - Вып. 2 (170). - С. 121-182.
41. Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмoeлектрических явлений во влажной почве. // Изв. АН СССР. Сер. Географ. и геофиз. - 1944. - Т. 8. - № 4. - С. 133-149.
42. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. - М.: Мир. - 1986. - 448 с.
43. Христианович С.А. Механика горных пород и горное давление. // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. - 1985. - № 1. - С. 3-17.
44. Цытович Н.А. Механика грунтов. - М.: Высшая школа. - 1983. - 288 с.
45. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. - М.: Наука. - 1989. - 288 с.
46. Шестаков В.М. Гидрогеодинамика. - М.: Изд-во МГУ. - 1995. - 368 с.
47. Шешенин С.В., Кузь И.С. О прикладных итерационных методах. - Вычислительная механика деформируемого твердого тела. - М., вып. 1. - 1990. - с. 63-74.
48. Щелкачев В.Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостопиздат, 1959.
49. Ajiz M.A., Jennings A. Robust Incomplete Algorithm of Cholesky-Conjugate Gradient Method. // Int. J. Numer. Meth. Engin. - Vol. 20. - No. 5. - 1984. - P. 949.
50. Allaire G. Homogenization of the Stokes flow in a connected porous medium. // Asympt. Anal. - 1989. - №2. - P. 203-222.
51. Bathe K.J., Pantuso D. On the stability of mixed finite elements in large strain analysis of incompressible solids. // Finite Elements in Analysis and Design. - 1997. - №28. - P. 83-104.
52. Bathe K.J. Finite Element Procedures. - Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ. - 1996. - 1037 p.
53. Bear J., Verrujt A. Modeling Groundwater Flow and Pollution. 1987.
54. Bertoni W., Brighenti G., Gambolati G., Ricceri G., Vuillermin F. Land subsidence due to gas production in the on- and off-shore natural gas fields of the Ravenna area, Italy. // Land Subsidence (Proceedings of the 5-th International Symposium on Land Subsidence, The Hague, October 1995). - 1995. - Vol. 1. - P.13-20.
55. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation. // Journal of Applied Physics. - 1941. - Vol. 12. - P. 155-164.

56. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. // Journal of Applied Physics. – 1955. – Vol. 26. – No. 2. – P. 182-185.
57. Biot M.A. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material. // Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME. – 1956. – Vol. 23. – No. 1. – P. 91-96.
58. Borja R.I. One-Step and Linear Multistep Methods for Nonlinear Consolidation. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1991. – Vol. 85. – No. 3. – P. 239-272.
59. Braess D. Finite Elements: theory, fast solvers and applications in solid mechanics. – Cambridge. – 2001. – 352 p.
60. Brandes K. Blast - resistant structures. In Proceedings of the International Workshop on Blast - Resistant Structures, Tsinghua Univ., Beijing, China, 1992.
61. Burbey T.J. Validity of Jacob's assumptions for calculating subsidence due to pumping of confined aquifers. / Morel-Seytoux HJ (ed) Proc. 17th Annual Am. Geophys. Union Hyd. Days Conf., 14-17 Apr. 1997, Colorado State Univ., Fort Collins, Colorado.
62. Chen H.Y., Teufel L.W., Lee R. Coupled fluid flow and geomechanics in reservoir study. // Paper SPE 30752 presented at the Annual Technical Conference & Exhibition. – Dallas, October 1995.
63. Darsy A. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Paris, 1856.
64. Gambolati G. Numerical models in land subsidence control. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1975. No. 5. – P. 227-237.
65. Hsieh P.A. Deformation-induced changes in hydraulic head during ground-water withdrawal. // Ground Water. – 1996. – Vol. 34. – P. 1082-1089.
66. Jacob C.E. Flow in groundwater. // Rouse h. engineering hydraulics. – New York: Wiley, 1950. – P. 321-386.
67. Kalinin E.V., Sheshenin S.V., Artamonova N.B., Kiselev F.B. Numerical investigations of the influence of fluid extraction upon the stress state of the rock masses. // Eng. Geology and Environment. Mat. Intern. Symp. Athens, Greece, 1997. – P. 725-728.
68. Kobel'kov G.M. Fictitious domain method and the solution of elliptic equations with highly varying coefficients. // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modeling. – 1987. – Vol. 2. – No. 6. – P. 407-419.
69. Nguyen T.Q., Helm D.C. Land subsidence due to groundwater withdrawal in Hanoi, Vietnam. // Land Subsidence (Proceedings of the 5-th International Symposium on Land Subsidence, The Hague, October 1995). – 1995. – Vol. 1. – P.55-60.
70. Nichols N. On the Convergence of Two-stage Iterative Process for Solving Linear Equations. // SIAM Journal Numer. Analysis. – Vol. 10. – No. 3. – 1973. – P. 460-469.
71. Peirce, D., Shih, C.F., and Needleman, A., A tangent modulus method for rate dependent solids, Computers & Structures, Vol. 18, pp. 975–888 (1984).
72. Sheshenin S.V., Demidovich P.N. Methodic for reinforced concrete under “soft impact” numerical simulation (appendix to INTASS 1999 periodic report). Moscow. – 1999. – 33 p.
73. Terzaghi K. Erdbaumechnik auf bodenphysikalischer grundlage. – Deuticke, Wien, Leipzig, 1925.
74. Wolff R.G. Relationship between horizontal strain near a well and reverse water level fluctuation. // Water Resources Research. – 1970. – Vol. 6. – No. 6 – P. 1721-1728.
75. Zhu J.-G., Yin J.-H. Deformation and Pore-Water Pressure Responses of Elastic Viscoplastic Soil. // Journal of Engineering Mechanics. – September 2001. – P. 899-908.

Глава 3. Описание интерфейса пользователя ПК«GeomechanICS»

Программный комплекс GeomechanICS состоит из трёх процессоров, препроцессора и постпроцессора. Процессором является отдельный исполняемый файл, выполняющий функции расчётного модуля. Объектом расчёта является расчётная модель, подготавливаемая в препроцессоре. Результатами расчёта являются файлы, содержащие расчет интенсивности напряжений и деформаций, компоненты тензора деформаций и вектора перемещений.

ПРЕПРОЦЕССОР

Препроцессор предназначен для создания расчетной модели, запуска её на расчёт, отображения хода расчёта, и запуска постпроцессора для работы с результатами расчёта. На рис. 1 обозначены элементы главного окна препроцессора.

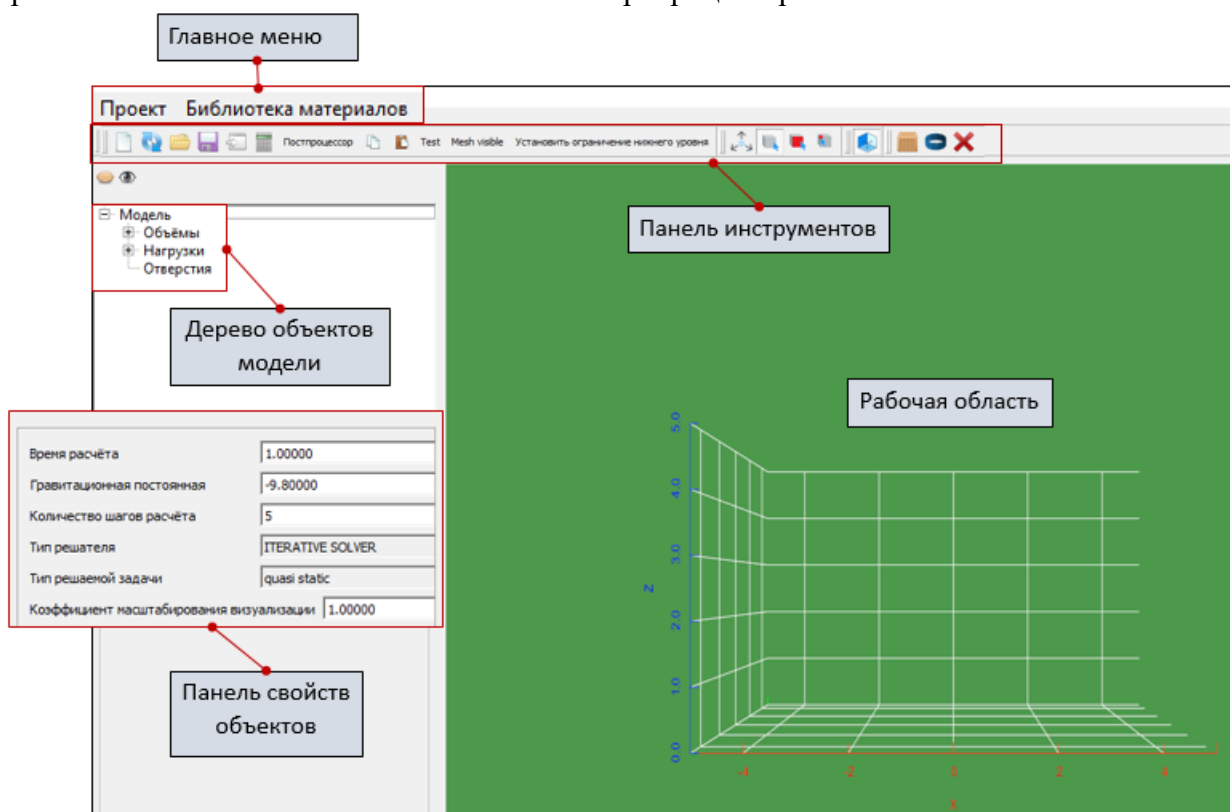
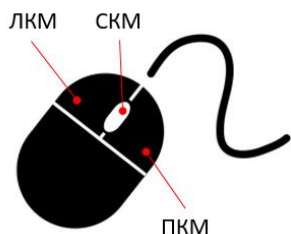


Рис.1 Главное окно препроцессора

По мере создания модели наполняется содержание дерева проекта.

Навигация при работе с комплексом

Для выполнения тех или иных действий при формировании проекта используются клавиатура и мышь. В дальнейшем названия кнопок мыши приводятся в сокращенной форме, а именно: **ЛКМ** – левая кнопка мыши, **СКМ** – средняя кнопка мыши (или колесо), **ПКМ** – правая кнопка мыши.



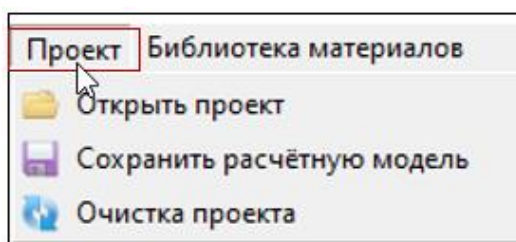
Функциональное назначение кнопок мыши в зависимости от ситуации приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

Манипуляции в рабочей области	
Выделение объема в рабочей области	Кликнуть на объем СКМ
Перемещение объектов	Нажать ЛКМ и, удерживая ее, сначала слегка переместить по горизонтали, а затем двигать в нужном направлении
Увеличение/Уменьшение изображения	Нажать ЛКМ и, удерживая ее, двигать вниз (увеличение) или вверх (уменьшение).
Поворот вокруг намеченной точки	Кликнуть на объекте ЛКМ . Появится небольшая сфера. Это будет центр вращения. Затем нажать ЛКМ , и удерживая ее, двигать в нужном направлении. Когда кнопка будет отпущена, то сфера исчезнет. Чтобы продолжить вращение, нужно действия повторить.
Манипуляции в дереве объектов модели	
Раскрыть содержимое узлов модели или скрыть	Нажать ЛКМ на значке «+» - раскрыть подчиненные объекты, нажать значке «-» скрыть подчиненные объекты.
Показать грань в рабочей области и ее свойства в панели свойств	Кликнуть ЛКМ на объекте «грань» в дереве проекта. Грань подсветится в рабочей области. Откроется панель со свойствами элемента.
Вызов контекстного меню при работе с гранями	Навести курсор на объект «грань» в дереве проекта и нажать ПКМ . Появится контекстное меню с 4 опциями (Объем от грани/ Объем от грани к грани/Указать нагрузку/Указать перемещение). Об этих опциях будет

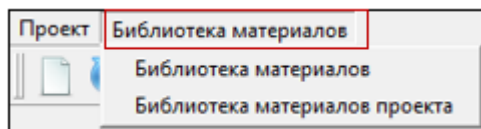
	говориться дальше. Также при этом грань отобразится в рабочей области, а ее свойства в панели свойств.
Отображение панели свойств для объекта	Кликнуть ЛКМ на объекте в дереве проекта. В панели свойств назначаются и редактируются параметры объекта.

Главное меню включает 2 пункта: **Проект** и **Библиотека материалов**.



Активируя пункт **Проект**, получаем 3 возможности:

- **Открыть** уже имеющийся **проект** для его редактирования,
- **Сохранить** созданную **расчётную модель** (проект) в выбранную директорию,
- **Очистить проект** – привести систему в исходное состояние и начать работу над новым проектом.



Пункт **Библиотека материалов** позволяет открыть библиотеку с материалами, которую можно использовать для задания объектам проекта соответствующих свойств.



Имеется возможность обратиться к двум библиотекам:

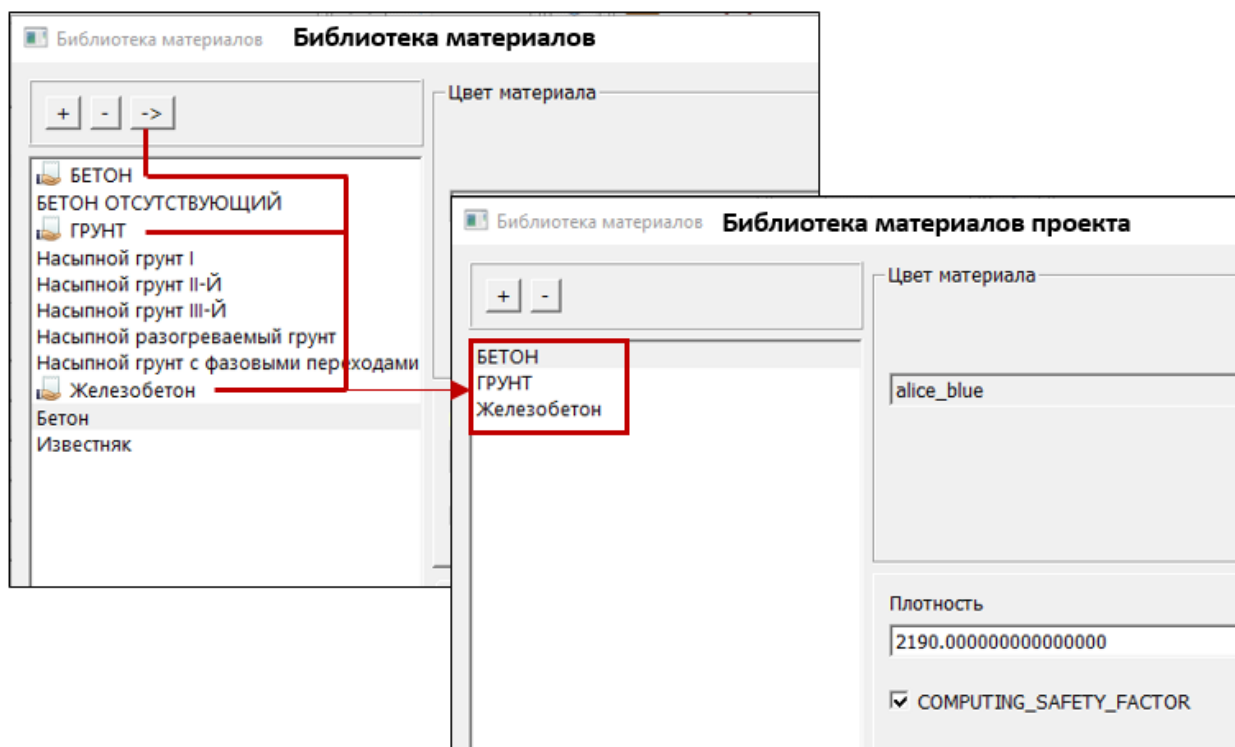
Первая (**Библиотека материалов**) включает материалы, часто используемые в практической деятельности. Библиотека материалов открыта для редактирования и расширения перечня материалов.

Для ввода информации по новому материалу нужно кликнуть **ЛКМ** по значку «+».

Появится окно с предложением ввести наименование материала. После того, как имя будет введено, нужно подтвердить – нажать на кнопку «**ОК**». Появляется новая позиция в списке, которую можно редактировать. Для удаления материала нужно его выделить в перечне и нажать **ЛКМ** кнопку «-»

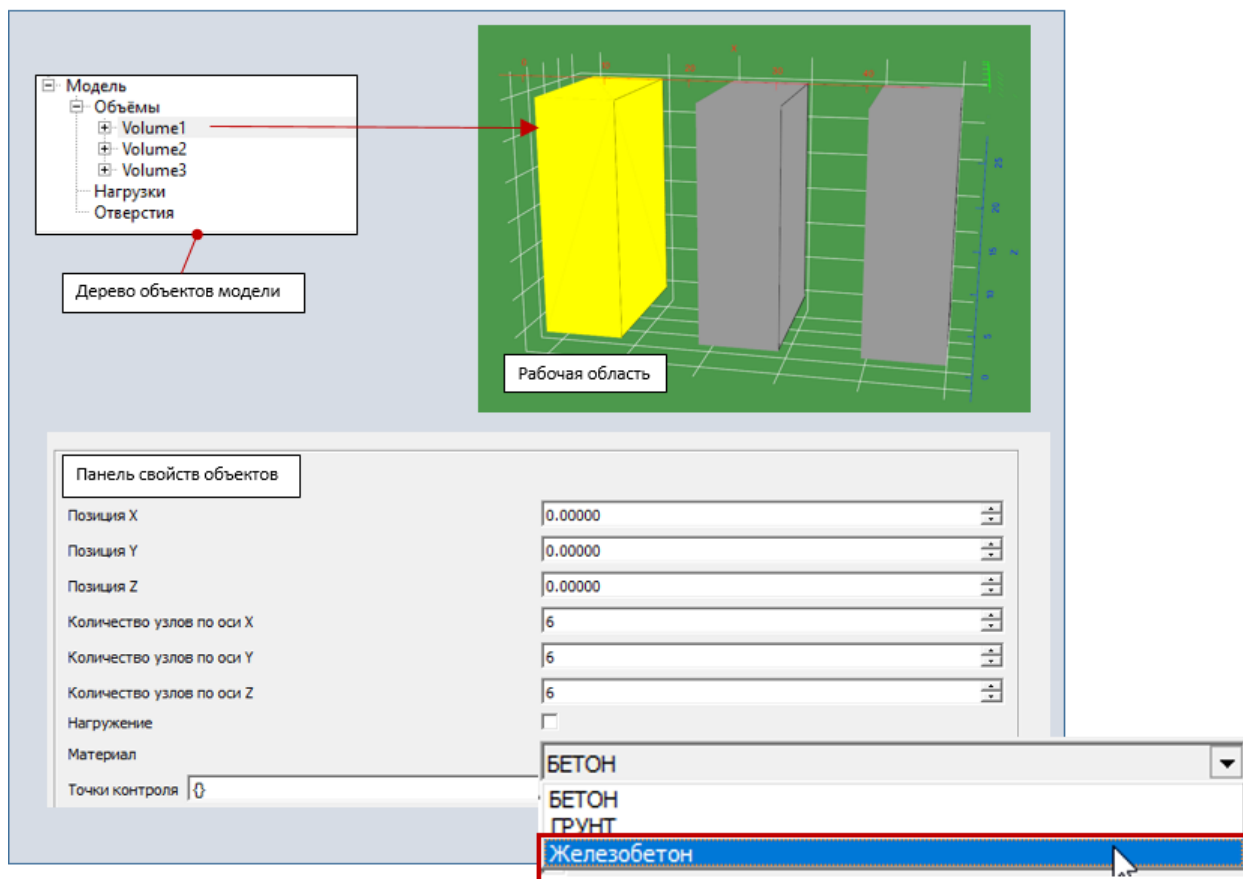
Прежде чем назначать объектам проекта свойства, соответствующие материалы необходимо перенести из **Библиотеки материалов** в **Библиотеку материалов проекта**.

Для этого необходимо открыть **Библиотеку материалов**, выбрать материал, позиционируя  нем курсор мышки и нажимая ЛКМ, а затем «кликнуть» ЛКМ на пиктограмму . Выбранный материал транслируется в библиотеку материалов проекта.



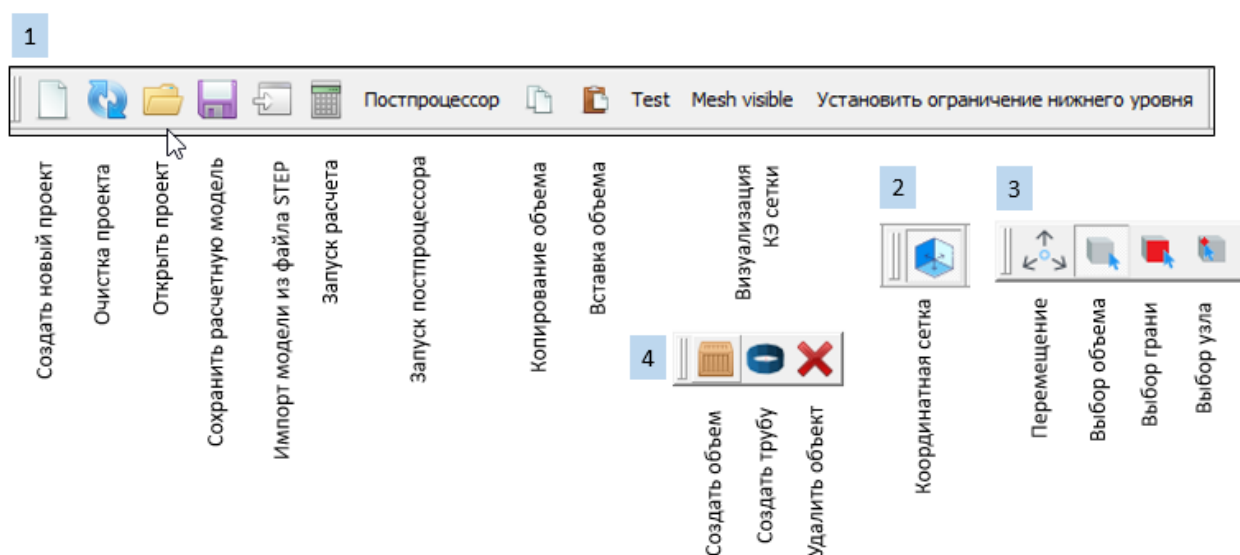
После этого эти материалы можно назначать объектам из панели свойств объектов.

Для этого необходимо выделить этот элемент (в дереве проекта ЛКМ, или в рабочей области СКМ) и в панели свойств объектов в пункте «Материал» выбрать из списка подходящий.



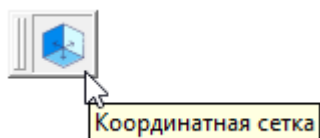
Библиотеки материалов проекта сохраняется одновременно с проектом, и, таким образом, обеспечивается переносимость проекта на другие ПК.

Панель инструментов включает 4 линейки команд.



Их назначение описывается ниже.

При позиционировании курсора мышки на пиктограмме появляется расшифровка ее назначения.



В дереве объектов отображаются узлы, содержащие информацию об объектах модели. Узел **Модель** содержит информацию о свойствах проекта. Узел **Объёмы** включает в себя элементы модели – объёмы (гексаэдры). **Нагрузки** – узлы, содержащие информацию о нагрузениях. **Отверстия** – информацию об отверстиях в объёмах.

ПОДГОТОВКА РАСЧЁТНОЙ МОДЕЛИ В ПРЕПРОЦЕССОРЕ

Работа с моделью начинается с выбора типа проекта (рис.2):

- Прочностной расчет,
- Расчет НДС с учетом фильтрационных свойств,
- Расчет термоупругого НДС

Выбор типа проекта осуществляется при создании нового проекта кнопкой «Создать новый проект».

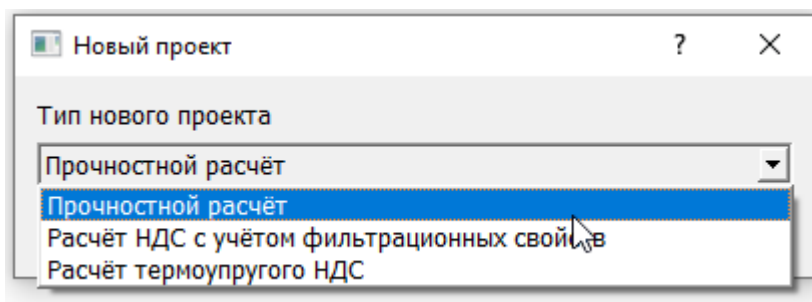



Рис. 1 Окно выбора типа проекта

После создания проекта, дерево объектов модели заполнится групповыми узлами.

Основными элементами модели являются объёмы. Первоначальная форма объёма – куб или прямоугольный параллелепипед, в зависимости от соотношения начальных размеров сторон. В препроцессоре объём состоит из граней и вершин. Нумерация граней: 1-я и 2-я грани - в направлении оси X, 3-я и 4-я грани - в направлении оси Y, 5-я и 6-я грани - в направлении оси Z. Доступ к граням осуществляется через дерево объектов. Для создания объёма следует нажать кнопку .

В диалоговом окне задать точка привязки и размеры объёма.

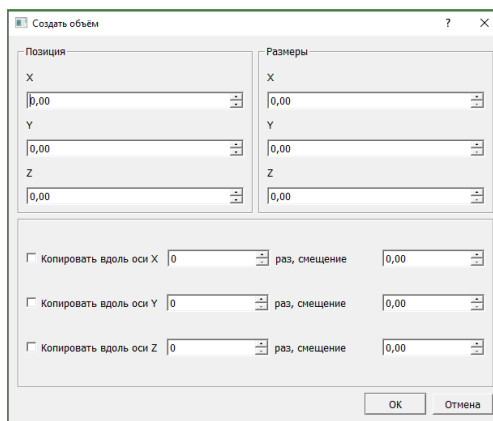
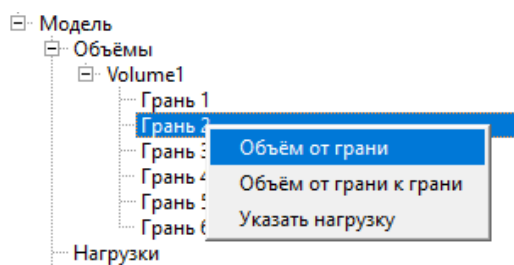


Рис. 2 Окно создания объёма

При необходимости, задаётся автоматизация создания подобных объёмов. Указывается направление и количество копирования объёмов вдоль координатных осей. Параметр **Смещение**, задаётся для создания интервалов между объёмами. Для редактирования свойств объёма, его необходимо выделить. Либо **СКМ** в рабочем поле, либо **ЛКМ** в дереве объектов. После выделения объёма, он изменит свой цвет, в левой части окна программы появится панель свойств объёма.

Создавая конструкцию в модели, объёмы можно строить относительно друг друга, используя в качестве отсчёта грани существующих объёмов. Объёмы можно строить: от **грани существующего объёма**, можно встраивать **между гранями существующих объёмов**.

Для построения объёма от грани существующего объёма, в дереве выбрать нужную грань, нажать правую кнопку мыши, из выпадающего меню выбрать пункт – **Объём от**



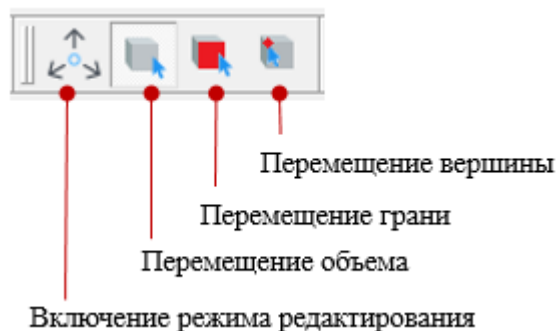
грани.

Рис.4 Выпадающее меню в дереве объектов на грани объема.

В появившемся окне ввести значение и выбрать способ построения нового объёма: **Длина вдоль оси** – введённое значение будет использовано в качестве длины нового объёма вдоль координатной оси, **Длина вдоль нормали** – введённое значение будет использовано в качестве длины нового объёма вдоль нормали выбранной грани, **Значение координаты** – введённое значение будет использовано в качестве координаты противоположащей грани нового объёма, вдоль координатной оси.

Для встраивания нового объёма между двумя гранями существующих объёмов необходимо выбрать в дереве одну из граней, вызвать правой кнопкой выпадающее меню и выбрать пункт **Объём от грани к грани**. После этого программа ожидает выбора второй грани, при выборе её, объём будет встроен между двумя гранями. Отменить эту операцию можно клавишей **Esc**.

При необходимости, форму объёма можно изменить с помощью режима редактирования вершин и граней.



Указание нагрузки, действующей на объем

Нагрузка к объёму прикладывается к соответствующей грани. Нагрузка схематично отображается в модели в виде стрелок, расположенных в узлах конечно-элементной сетки. Для задания нагрузки на объём нужно выбрать объём, соответствующую грань объёма в дереве объектов, правой кнопкой «мыши» вызвать всплывающее меню и выбрать пункт: **Указать нагрузку**. При этом нагрузка будет приложена ко всей поверхности грани. Графический объект обозначающий нагрузку будет построен на выбранной грани объёма и в дереве объектов в разделе **Нагрузки** будет создан узел для редактирования свойств. Для редактирования свойств нагрузки, её необходимо выбрать мышью в дереве объектов.

Параметры нагрузки:

- Местоположение нагрузки на грани объёма задаётся в узлах конечно-элементной сетки. Направления 1 и 2 соответствуют измерениям грани на плоскости в длину и ширину. Количество узлов в гранях по направлениям указываются в параметрах объёма.

Параметры нагрузки

Точки нагрузки по 1-му направлению

Начальная точка по 1 направлению: 5

Конечная точка по 1 направлению: 7

Точки нагрузки по 2-му направлению

Начальная точка по 2 направлению: 5

Конечная точка по 2 направлению: 7

Время действия нагрузки, с: 1.00000

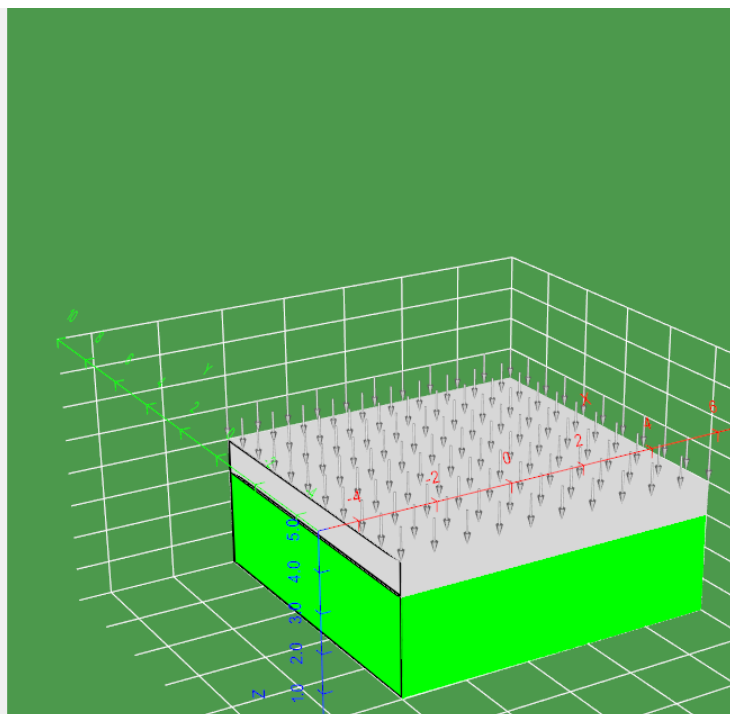
Время увеличения нагрузки, с: 0.50000

Проекция вектора нагрузки на ось X, МПа: 0.00000

Проекция вектора нагрузки на ось Y, МПа: 0.00000

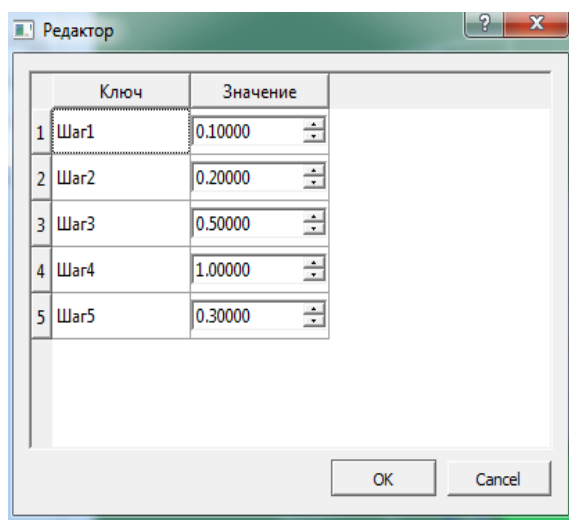
Проекция вектора нагрузки на ось Z, МПа: -10.00000

Тип нагрузки: Двойной треугольник



- Время действия нагрузки указывается в секундах (для прочностного расчёта) или в сутках (для расчёта НДС с учетом фильтрационных свойств или расчёта термоупругого НДС) и не должно превышать время расчёта
- Тип нагрузки, можно выбрать один из четырёх типов нагрузок:
 - Двойной треугольник, параметры:

- Время увеличения нагрузки в **секундах** (для прочностного расчета) или в сутках (для расчета НДС с учетом фильтрационных свойств или расчета термоупругого НДС), значение времени, в течении которого нагрузка пропорционально увеличивается, в оставшееся время (время действия минус время увеличения) пропорционально уменьшается
- Проекция векторов нагрузки на оси X, Y, Z в **МПа**
- Синусоидальная нагрузка, действие нагрузки меняется по синусоидальному закону $A \cdot \sin(\omega t)$ с различными в общем случае амплитудами по координатным осям, но с одинаковой частотой, параметры:
 - Частота ω в **рад/с**, частота изменения действия нагрузки
 - Амплитуда A_x, A_y, A_z гармонического колебания нагрузки по осям X, Y, Z в **МПа**
- Нагрузка, моделирующая экспоненциально-затухающие гармонические колебания по закону $A \cdot e^{-\theta t} \cdot \sin(\omega t)$, параметры:
 - Частота ω в **рад/с**, частота изменения действия нагрузки
 - Показатель θ степени экспоненты в **1/с**
 - Амплитуда A_x, A_y, A_z гармонического колебания нагрузки по осям X, Y, Z в **МПа**
- Ручное распределение нагрузки по шагам, позволяет распределить величину нагрузки путём задания коэффициентов на каждый шаг расчёта



При сборке модели необходимо обратить внимание на граничные условия нижних граней всех объёмов, перемещения в грани должны быть запрещены. Существует автоматическое «закрепление» нижних граней по кнопке **Установить ограничения нижнего уровня**.

Задание граничного вектора ненулевых перемещений и ненулевого граничного вектора напряжения, действующих на объем

Вектора ненулевых перемещений и напряжений задаются на гранях объёмов. Вектора схематично отображается в модели в виде стрелок красного цвета, расположенных в узлах конечно-элементной сетки. Для задания вектора ненулевых перемещений на объём нужно выбрать объём, соответствующую грань объёма в дереве объектов, правой кнопкой «мышь» вызвать всплывающее меню и выбрать пункт: Установить ненулевые перемещения грани. При этом вектор ненулевых перемещений будет приложен ко всей поверхности грани. Графический объект обозначающий вектор ненулевых перемещений будет построен на выбранной грани объёма и в дереве объектов в разделе Ненулевые перемещения будет создан узел для редактирования свойств. Для редактирования свойств

вектора ненулевых перемещений, необходимо выбрать мышью соответствующий узел в дереве объектов.

Способы задания свойств векторов ненулевых перемещений и напряжений

Задействованы 4 варианта задания ненулевого граничного вектора перемещения и ненулевого граничного вектора напряжения. Для всех 4-х вариантов задается время изменения векторов граничного перемещения и напряжения.

Эта задаваемая величина может принимать значение от нуля и до времени расчета всей задачи.

Вариант 1: табличный. Задается максимальная алгебраическая проекция вектора на каждую из трех осей глобальной декартовой системы координат. И закон изменения во времени этой проекции для каждой из трех осей.

Вариант 2: в виде двухзвенной ломанной. Задается дополнительно время линейного возрастания перемещения или напряжения. Время линейного убывания перемещения или напряжения вычисляется само.

Вариант 3: гармоническое колебание. Для каждой из трех осей глобальной системы координат задается закон изменения алгебраической проекции векторов граничного перемещения или напряжения в виде: $A \cdot \sin(\omega t)$ путем задания амплитуды A и частоты ω колебаний.

Вариант 4: затухающие гармонические колебания. Для каждой из трех осей глобальной системы координат задается закон изменения алгебраической проекции векторов граничного перемещения или напряжения в виде: $A \cdot e^{-\theta t} \cdot \sin(\omega t)$ путем задания амплитуды A , частоты ω колебаний и показателя степени θ у экспоненты. Амплитуды для каждой оси могут быть заданы независимым образом, но параметры ω и θ общие для всех трех осей.

Важно, что на одной части границы можно задавать ненулевое условие только одного вида: либо только вектор ненулевого перемещения, либо только вектор ненулевого напряжения. Но: если на части границы задается ненулевое перемещение только в направлении одной координатной оси, скажем Oy (как в прилагаемом примере) и тип граничного условия E212, то в направлении координатных осей Ox и Oz автоматически задаются нулевые проекции вектора напряжений. Для прилагаемого примера ненулевое перемещение направлено по нормали к грани, а значит получаемые нулевые проекции напряжений являются касательными к грани.

Моделирование отверстий

Отверстия формируются из двух объёмов, при этом используются соседние грани этих объёмов. На рисунке 5 изображены два объёма: 1 и 2, отмечены их противолежащие грани 2 и 1 соответственно.

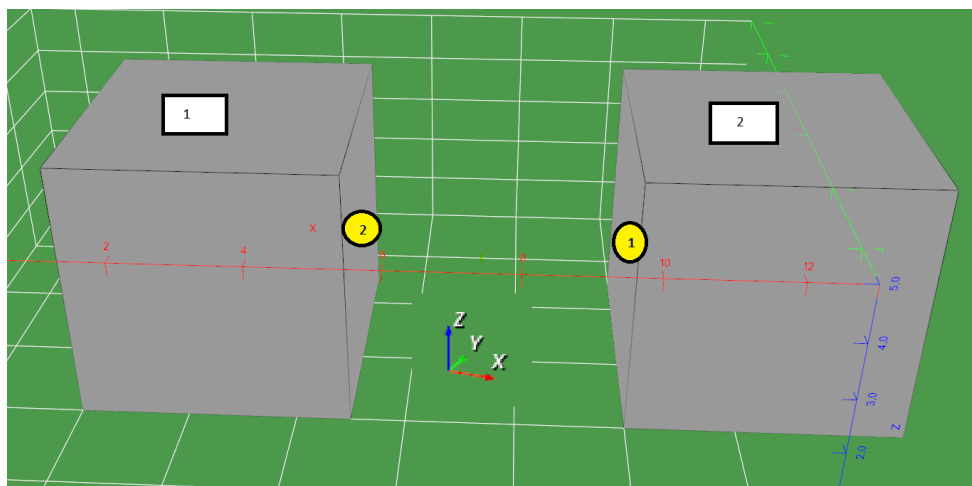


Рис. 5 Формирование отверстия

Для создания отверстий, нужно нажать правой кнопкой на узле **Отверстия** дерева объектов и выбрать пункт **Создать описание отверстия**. Далее выбрать в дереве узел непосредственно с описанием отверстия и заполнить его параметры. В параметре **Номера объёмов**, указываются через пробел номера двух объёмов, участвующих в формировании отверстия. В параметре **Номера граней**, указываются номера граней объёмов. В параметре **Номера осей**, указываются номера осей вдоль которых производится «искривление» граней при формировании стенок отверстия. Номера осей: ось X обозначается индексом 1, Y – 2, Z -3. На рисунке 6 изображены отверстия при указании осей а) 2 и б) 3.

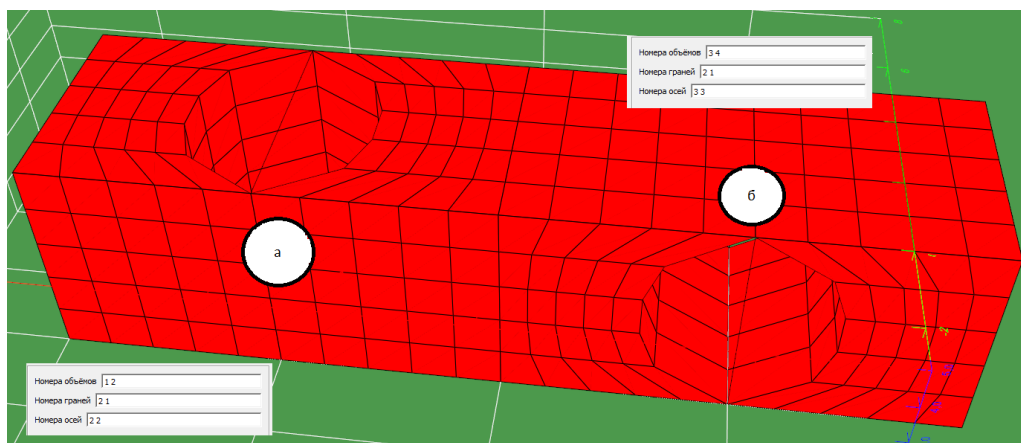


Рис. 3 Отверстия при задании осей а - 2 и б - 3

Моделирование скважин в моделях расчёта НДС с учётом фильтрационных свойств

Скважины – это области в объёмах, моделирующие закачку (откачку) жидкости.

Скважины
Скважина №1

Номер объёма	7
Расход скважины, м³/сут.	1000,00000
Номер шага по времени начала работы	3
Номер шага по времени окончания работы	9
Точки расположения скважины	а по третьей оси для скважины: 2, "Номер конечного узла по третьей оси для скважины": 7

Рис. 4 Параметры описания скважин

При заполнении параметра **Расход скважины**, следует обратить внимание: положительные значения означают закачку жидкости, отрицательные откачку. Расположение скважины в объёме задаются в координатах конечно-элементной сетки объёма.

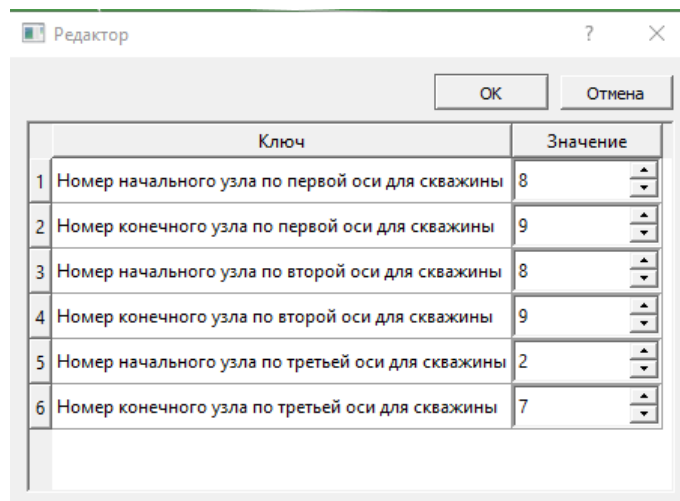
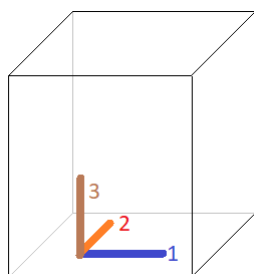


Рис. 5 Редактор параметра положения скважины



Направления отсчёта узлов конечно-элементной сетки объёма указано на

Рис. 6. После указания узлов расположения скважины, при переходе на узел, описывающий скважину, она схематично отображается в рабочей области окна.

Рис. 6

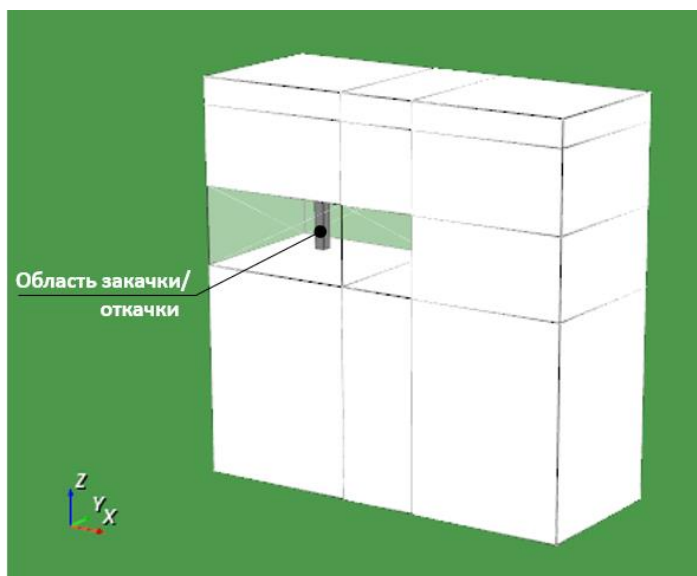


Рис. 10 Схематичное отображения области закачки/ откачки жидкости

Копирование/вставка

Существует возможность копирования нескольких идентичных конструктивных участков модели с помощью копирования и вставки. Для этого необходимо выделить те объёмы, которые составляют часть модели, предназначенную для копирования. Нажать

кнопки **Копировать, Вставить**. В диалоговом окне настроить опции копирования, аналогично опциям при создании объёма.

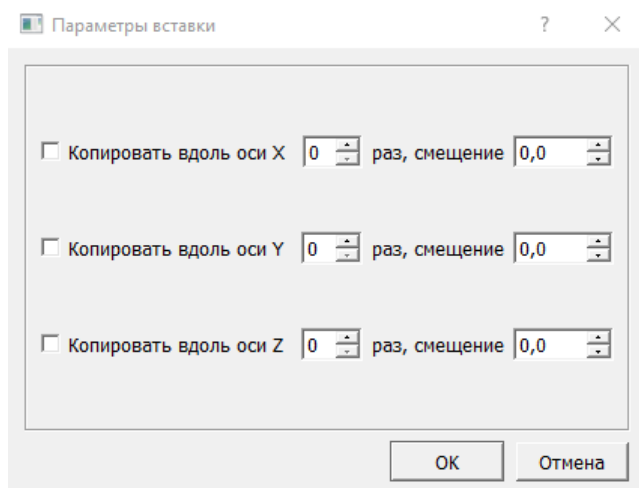


Рис. 7 Диалог настройки опций копирования

При сборке модели обратить внимание на граничные условия нижних граней всех объёмов, перемещения в грани должны быть запрещены. Существует автоматическое «закрепление» нижних граней по кнопке **Установить ограничения нижнего уровня**.

После сборки модели её нужно сохранить на диск с помощью кнопки **Сохранить** и можно провести расчёт, нажав кнопку **Запуск расчёта**. По окончании расчёта на диске в директории проекта **result** будут находиться выходные файлы процессора. Просмотр и анализ этих файлов проводится с помощью постпроцессора. Запуск постпроцессора осуществляется кнопкой **Постпроцессор**. Рабочими файлами постпроцессора являются файлы с расширением DAT. Они бывают трёх видов. Первая группа **plot_deviat**, содержит расчет интенсивности напряжений и деформаций:

- E_i – квадратный корень из второго инварианта девиатора тензора деформации;
- S_i – интенсивность касательных напряжений (квадратный корень из второго инварианта девиатора тензора напряжений);
- E_{i_pl} – заготовка для упруго-пластических задач;
- S_{i_pl} – заготовка для упруго-пластических задач;
- $Teta_pl_compr$ – заготовка для упруго-пластических задач;
- $Sigma_pl_compr$ – заготовка для упруго-пластических задач;
- $Teta_pl_tens$ – заготовка для упруго-пластических задач;
- $Sigma_pl_tens$ – заготовка для упруго-пластических задач.

Вторая группа **plot_main** содержит расчет компонент тензора напряжений и вектора перемещений:

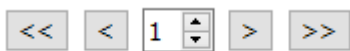
- S_II – первый инвариант тензора напряжений;
- $S11$ – нормальные напряжения по оси X ;
- $S22$ – нормальные напряжения по оси Y;
- $S33$ – нормальные напряжения по оси Z;
- $S12$ – касательные напряжения по оси XY;
- $S13$ – касательные напряжения по оси XZ;
- $S23$ – касательные напряжения по оси YZ;

- U_0 – перемещения по оси X;
- V_0 – перемещения по оси Y;
- W_0 – перемещения по оси Z.

Третья группа **plot_strains** содержит расчет компонент тензора деформаций:

- E_{II} – первый инвариант тензора деформаций;
- E_{11} – деформация по оси X;
- E_{22} – деформация по оси Y;
- E_{33} – деформация по оси Z;
- E_{12} – сдвиговая деформация в плоскости XY;
- E_{13} – сдвиговая деформация в плоскости XZ;
- E_{23} – сдвиговая деформация в плоскости YZ.

Файлы можно открывать по одному, либо группой, выделяя их мышью в диалоговом окне открытия файлов. Вызывается окно через меню **Постпроцессинг - Результаты расчёта**. Если постпроцессор был вызван из препроцессора с рабочей моделью, то в окне автоматически будет открыт каталог с файлами постпроцессора. Если открыто несколько файлов, между ними можно переключаться с помощью навигатора.



Между переменными в файлах переключаться через меню **Постпроцессинг - Данные**, выбирая вложенные пункты с названиями переменных.

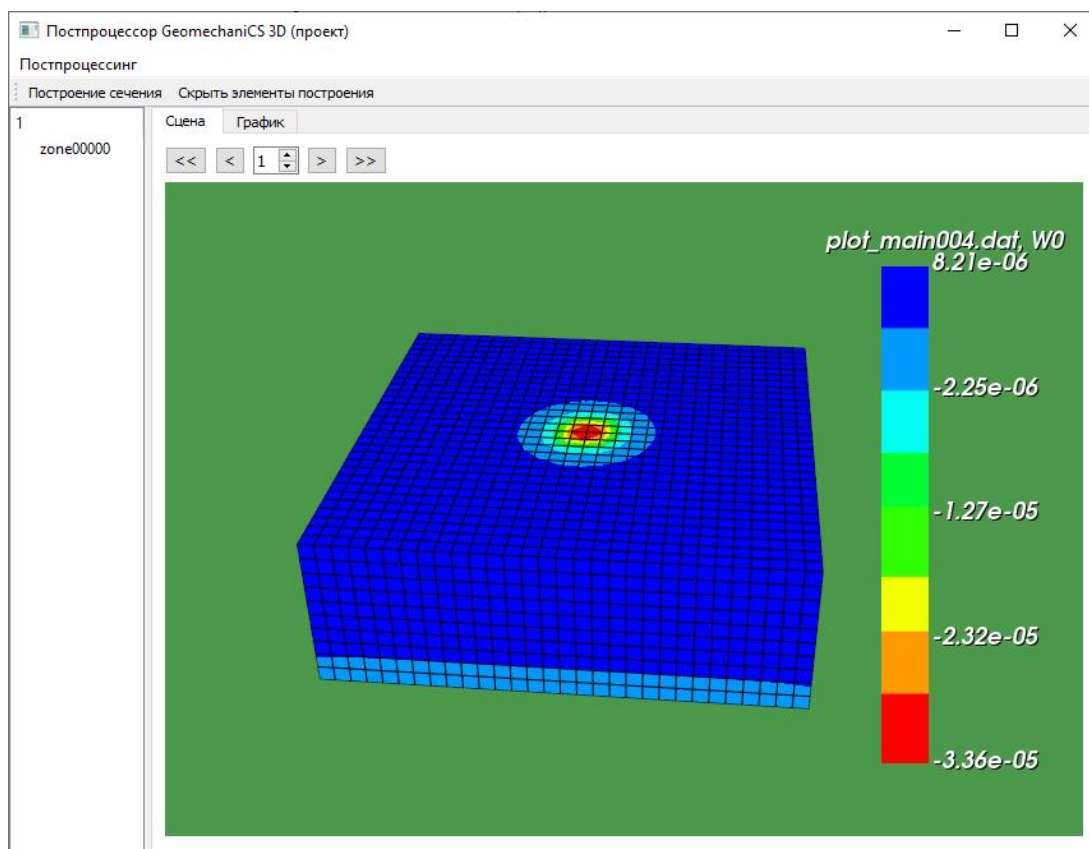


Рис.8 Окно постпроцессора с визуализацией вертикальных перемещений расчетной области

Построение сечений осуществляется с помощью инструмента **Построение сечений**. При нажатии на кнопку в рабочей области постпроцессора появляется изображение секущей плоскости с возможностью её позиционирования для отображения требуемого ракурса.

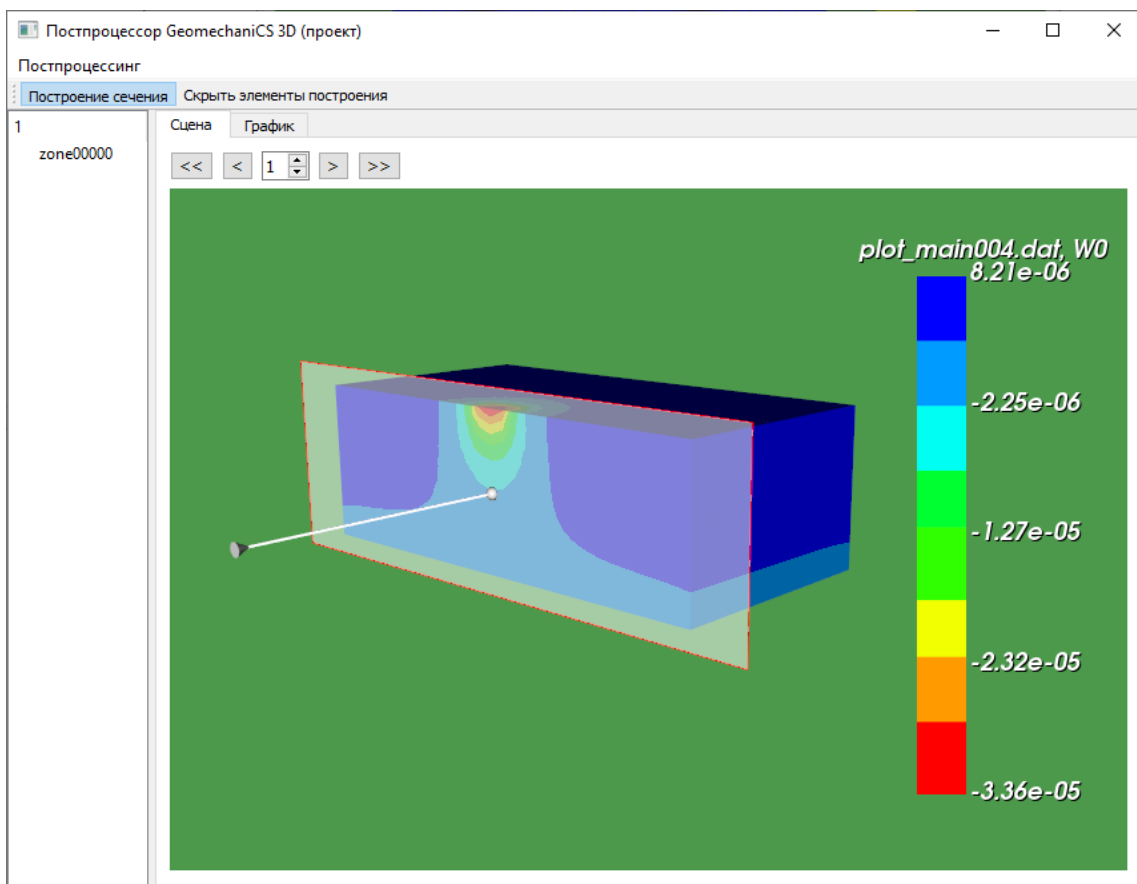


Рис.9 Окно постпроцессора с инструментом построения сечения

Для улучшения видимости, инструменты построения можно скрыть кнопкой **Скрыть элементы построения**.

Для визуализации значений переменных также применяется инструмент построения изолиний через меню **Постпроцессинг - Изолинии**. При вызове инструмента появляется диалоговое окно с настройками для генерации изолиний. В поле количества контуров вводится количество желаемых диапазонов значения переменной. При нажатии на кнопку **Генерировать** рассчитываются требуемые диапазоны.

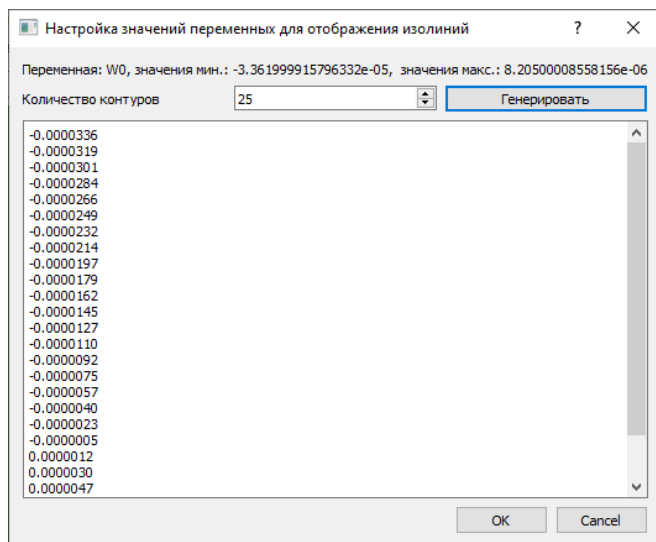
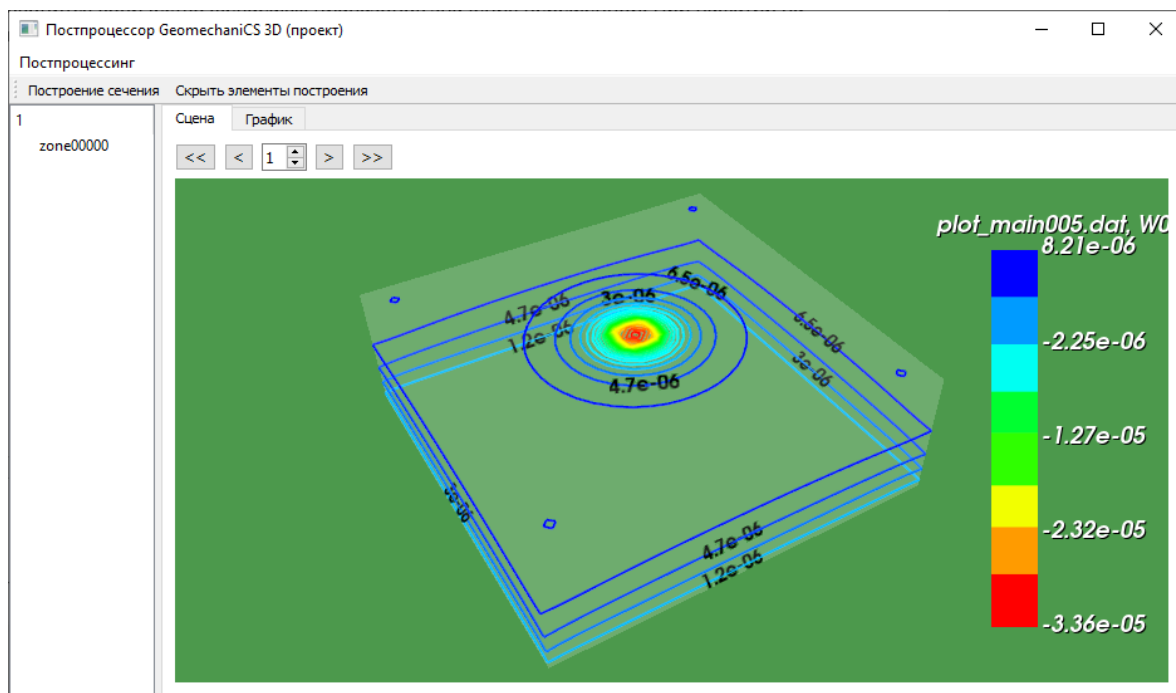


Рис.10 Окно настройки значений переменных

При нажатии кнопки **Ок**, изолинии визуализируются.



Глава 4. Верификация программы

4.1 Расчет напряженно-деформированного состояния балки прямоугольного сечения при действии квазистатических нагрузок

Для оценки влияния параметров КЭ-сетки на результаты расчетов НДС в программе для ЭВМ GeomechanICS рассматривалась задача об изгибе балки прямоугольного сечения, жестко защемленной с двух концов, как показано на рис.4.1.

Исходные данные:

$E = 32500$ МПа – модуль упругости,

$\mu = 0.14$ – коэффициент Пуассона,

$L = 6$ м – длина балки,

$h = 0.3$ м - высота сечения балки,

$b = 1$ м – ширина балки.

Балка загружена равномерно распределенной нагрузкой $Q = 1000$ Кн/м, что при ширине сечения балки $b = 1$ м соответствует давлению 100 тн/м² (1 МПа).

Для оценки получаемого решения вычисляется прогиб Y_{\max} в середине пролета балки. Имеется аналитическое решение: $Y_{\max} = Q * L^4 / (384 * E * J)$, где $J = b * h^3 / 12$.

Подставляя размерности распределенной силы и длины в тн и м, получаем:

$$Y_{\max} = (100 * 6^4) * 12 / (384 * 3250000 * 1 * 0,3^3) = 0,04615 \text{ м};$$

Для определения НДС балки использовались КЭ-модели, состоящие из 8-ми узловых шестигранников. Определялись прогибы балки на последовательно сгущающихся сетках.

Расчет проведен по схемам интегрирования методом трапеции и Гаусса.

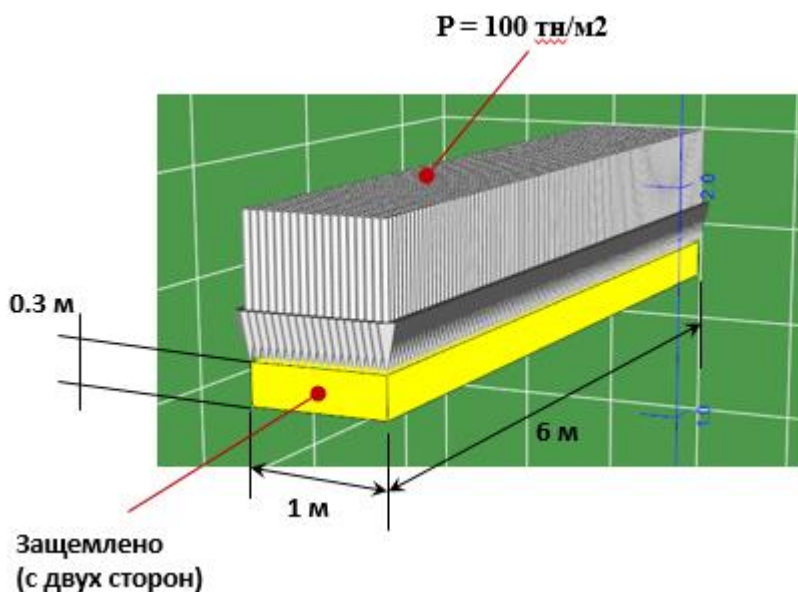


Рис. 4.1. Вид балки и нагружение.

Результаты численных расчетов в ПК GEOMECHANICS обобщены в Таблице 1.

Таблица 1.

№ варианта	Сетка конечных элементов	Метод интегрирования	Прогиб центральной точки балки, м
1	10x100x6	Трапеций	0,0413
2	10x200x6	Трапеций	0,0429
3	10x300x6	Трапеций	0,0431
4	18x100x6	Гаусса	0.0461
Аналитика	----	-----	0,0462

Как видно из таблицы, по мере сгущения сетки и при переходе к более точной схеме интегрирования точность результата возрастает (ориентация на аналитический результат).

Для варианта 4 приведено цветографическое представление результата (рис.4.2).

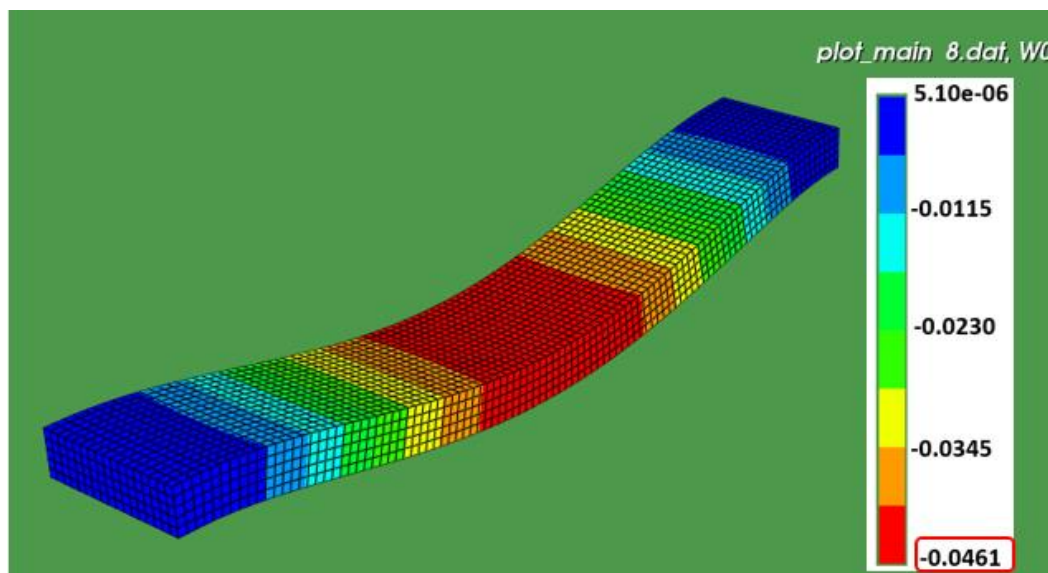


Рис. 4.2 Деформированная балка, рассчитанная в ПК GeomechanICS (масштабирование перемещений – 10).

Эта же задача решалась в ПК ANSYS. При сетке 18x100x6 прогиб в центральной точке составил 0,0469 м (рис.4.3).

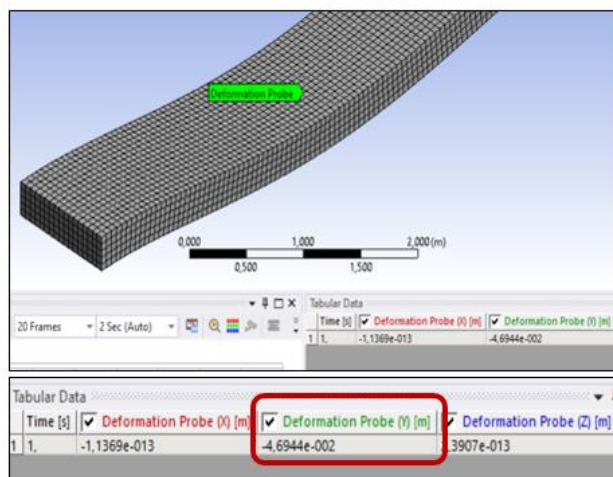


Рис. 4.3 Деформированная балка, рассчитанная в ПК ANSYS.

Ниже представлена результирующая таблица, где дана оценка погрешности

№ варианта расчета	Сетка конечных элементов	Метод интегрирования	Прогиб центральной точки балки, м	Ошибка, % (Численное решение – Аналитика)/Аналитика *100
Аналитика	----	-----	0,0462	-----
ПК GeomechanICS	18x100x6	Гаусса	0,0461	-0,22
ПК ANSYS	18x100x6		0,0469	1,52

Ошибку можно считать приемлемой.

4.2 Расчет напряженно-деформированного состояния полупространства при действии квазистатических нагрузок

Для оценки точности разработанных методов расчета, реализованных в ПК GeomechanICS, рассматривалась задача воздействия жесткого штампа на верхнюю грань куба с жестко заземленной противоположной гранью, как показано на рисунке 4.4.

Результаты расчета в ПК GeomechanICS сравнивались с результатами расчета в ПК ANSYS.

Оценивалось вертикальные перемещения в центре тяжести куба.

Исходные данные:

$E = 32500$ МПа – модуль упругости,

$\nu = 0,14$ – коэффициент Пуассона,

$L = 2$ м – длина ребра куба,

$a = 1$ м, $b = 1$ м – размеры области нагружения грани куба,

$h = -0,1$ м – заданное вертикальное перемещение штампа прямоугольной формы (1 м х 1 м), воздействующего на верхнюю грань куба.

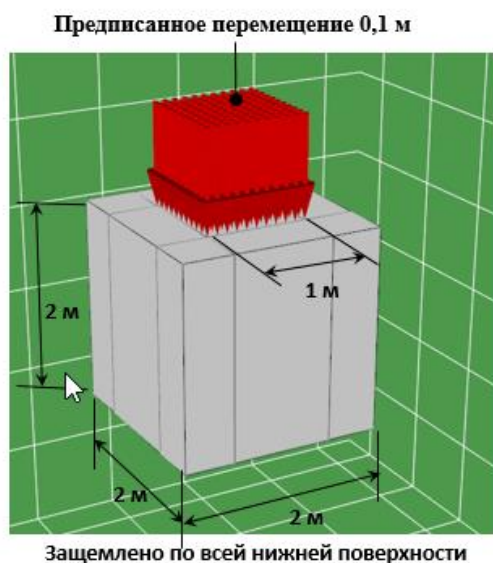


Рис.4.4 Общий вид расчетной области и нагружения

Расчет в ПК GeomechanICS

Разбиение куба в ПК GEOMECHANICS – сетка 20х20х20 КЭ (пространственные 8-ми узловые 6-ти гранные конечные элементы) – Рис.4.5.

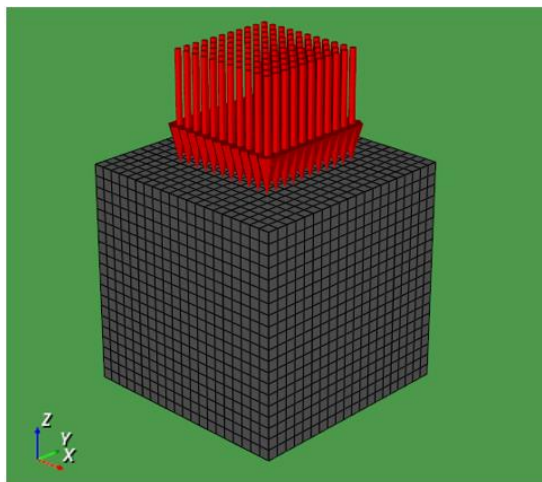


Рис.4.5 Конечно-элементное представление расчетной области

Для наглядного представления результатов расчета используется постпроцессор ПК GeomechanICS.

На рис. 4.6 показан один из результатов решения – вертикальная составляющая вектора перемещения.

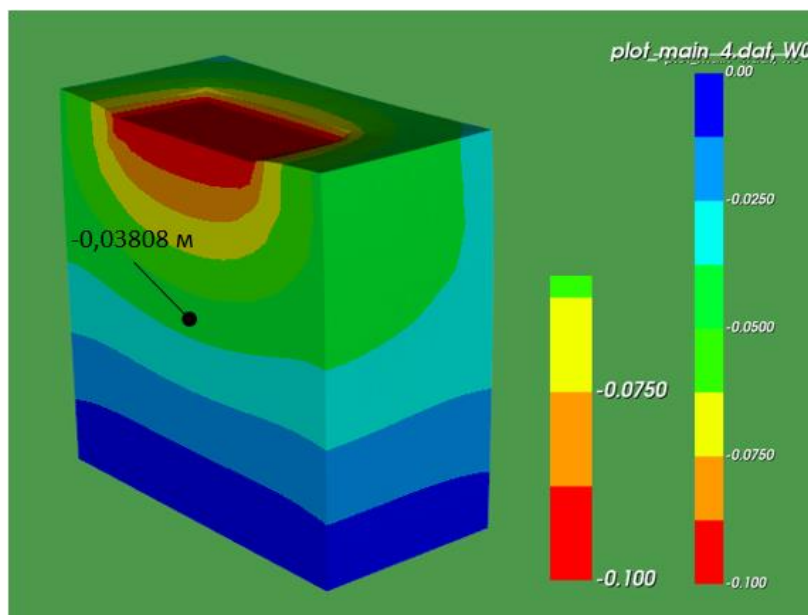


Рис. 4.6 Цветографическое представление вертикальной составляющей перемещений (W_0 , м) под действием предписанного перемещения. Коэффициент масштабирования перемещений равен 1.

Максимальное вертикальное перемещение соответствует величине вдавливания штампа (-0,1 м). Вертикальная составляющая перемещений в центральной точке куба составляет -0,03808 м. Данное значение получено в результате ручной обработки результатов. Центральная точка куба соответствует координатам (0,5 м; 0,5 м; 1 м) недеформированной модели. Цветографическое представление результатов дает возможность ориентировочно оценить это значение. В следующих версиях программы будет расширен функционал представления результатов, и в интересующей точке результат можно будет получать в автоматическом режиме.

Расчет в ПК ANSYS

Аналогичный расчет проведен в ПК ANSYS. Условие нагружения и результаты представлены на рис. 4.7 – 4.9.

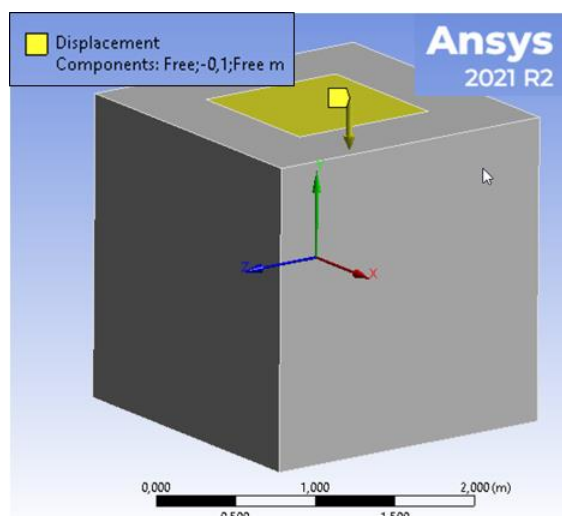


Рис.4.7 Условие нагружения модели – предписанное перемещение по вертикальной оси (в данном случае это ось Y) на 0,1 м при закреплении нижней грани по всем степеням свободы.

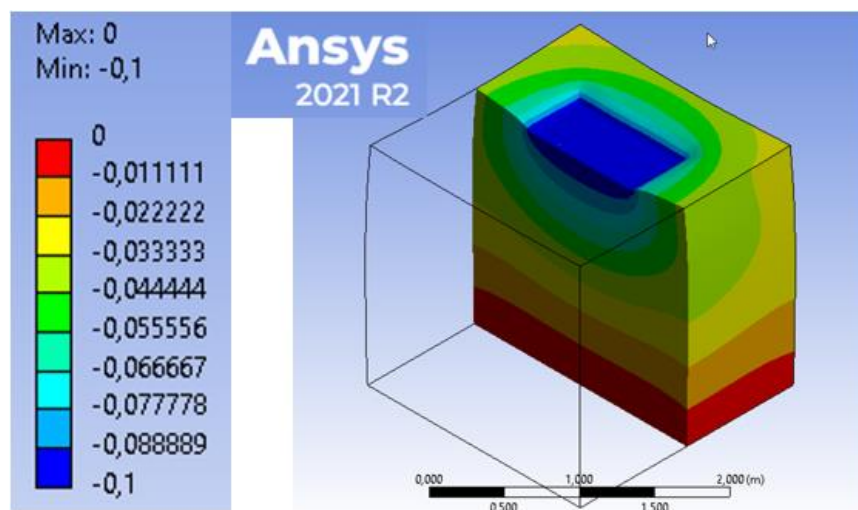


Рис. 4.8 Поля вертикальных перемещений (размерность – метры) в объеме модели.

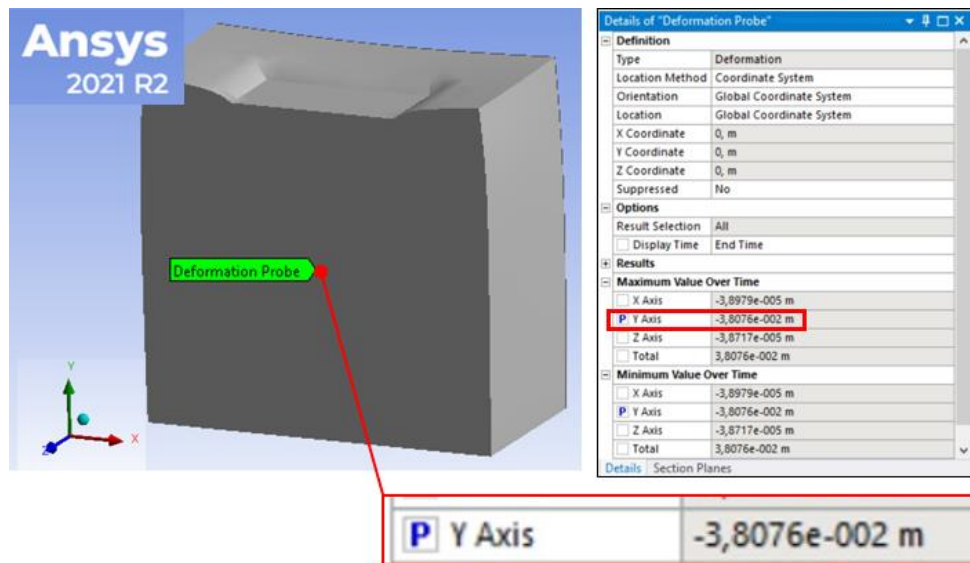


Рис. 4.9 Для определения перемещения в интересующей точке используется инструмент «Пробник». Показаны результаты измерения в центре тяжести куба.

Значение вертикальной составляющей перемещения в центре тяжести куба (**-0,038076 м**) практически идентично результату, полученному в ПК GeomechanICS (**-0,03808 м**).

4.3. Расчет напряженно-деформированного состояния полупространства при вдавливании круглого штампа под действием квазистатических нагрузок

Для оценки точности разработанных методов расчета, реализованных в ПК GeomechanICS, рассматривалась задача о жестком вдавливании круглого штампа в полупространство с жестко заземленной противоположной гранью, как показано на рисунке 4.10. Вес штампа и массива не учитывался. Результаты расчета в ПК GEOMECHANICS сравнивались с результатами расчета в ПК ANSYS.

Сопоставлялись вертикальные перемещения круглого штампа и перемещения в точке центра тяжести - центральной точке полупространства.

Исходные данные:

Массив полупространства

$E = 40$ МПа – модуль упругости,

$\nu = 0,24$ – коэффициент Пуассона,

$\rho = 1800$ кг/м³ - плотность массива.

Размеры полупространства – $a \times b \times h = 3 \times 3 \times 1$ м.

Штамп

$E = 32500$ МПа – модуль упругости,

$\nu = 0.2$ – коэффициент Пуассона,

$\rho = 2190$ кг/м³ плотность штампа,

$D = 1$ м, $h = 0,1$ м – диаметр и высота штампа.

На квадратную площадку штампа размером $0,5 \times 0,5$ м² (расположенную симметрично, как показано на рис. 4.10) действует давление $\bar{\sigma} = 1,0$ МПа.

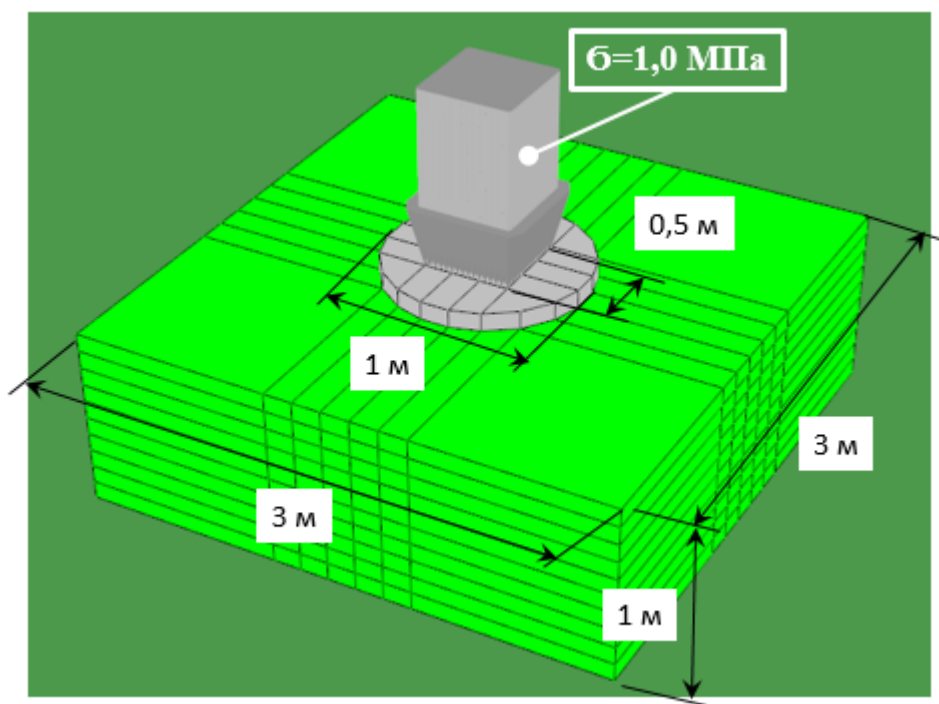


Рис.4.10 Размеры массива и схема нагружения

Результаты расчетов в ПК GEOMECHANICS

Результаты представлены на рис. 4.11, 4.12.

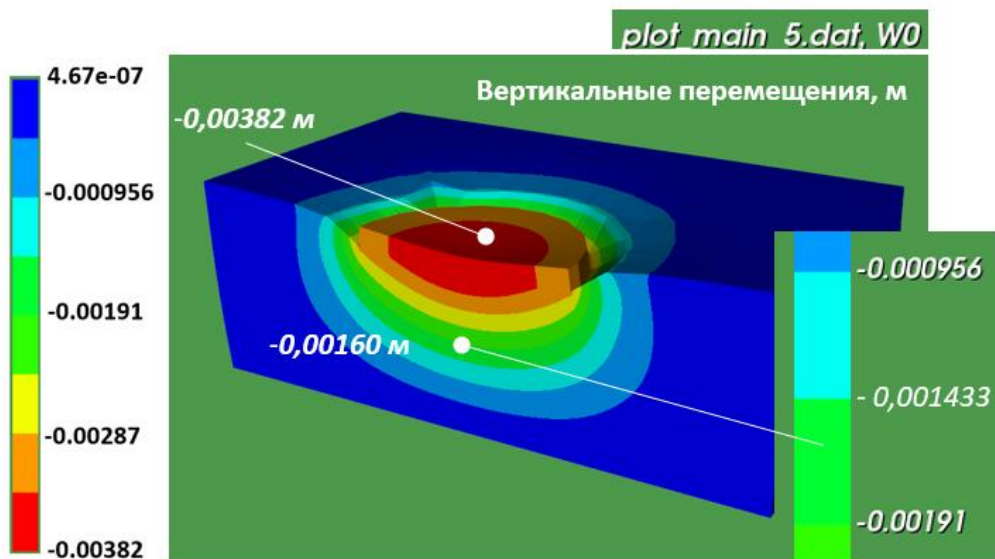


Рис. 4.11 Рассчитанное поле вертикальных перемещений в объеме модели, м.
Коэффициент масштабирования перемещений: 57.

Вертикальное перемещение штампа равно – **0,00382 м**

Вертикальные перемещения в центральной точке массива равно **-0,00160 м**.

Результаты расчетов в ПК ANSYS

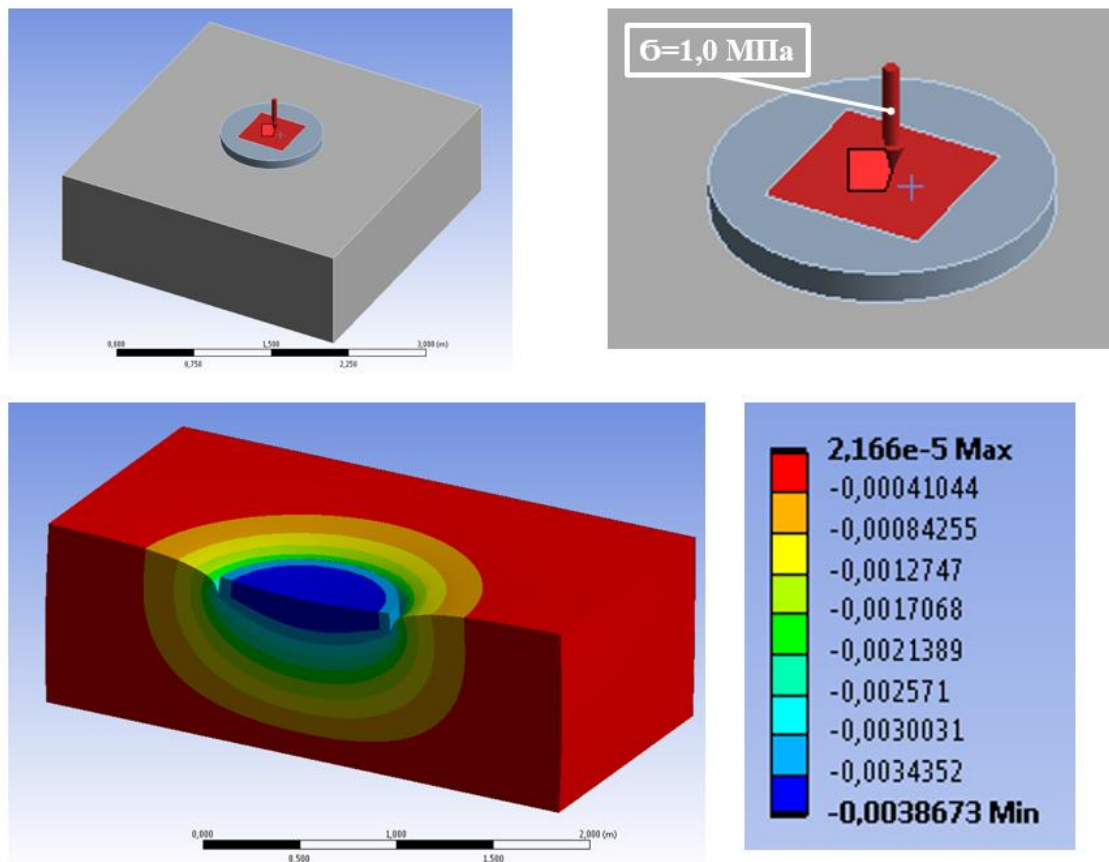


Рис.4.12 Схема нагружения массива (верхняя половина рисунка) и картина распределения вертикальных перемещений (м) в центральном сечении. Коэффициент масштабирования перемещений: 57.

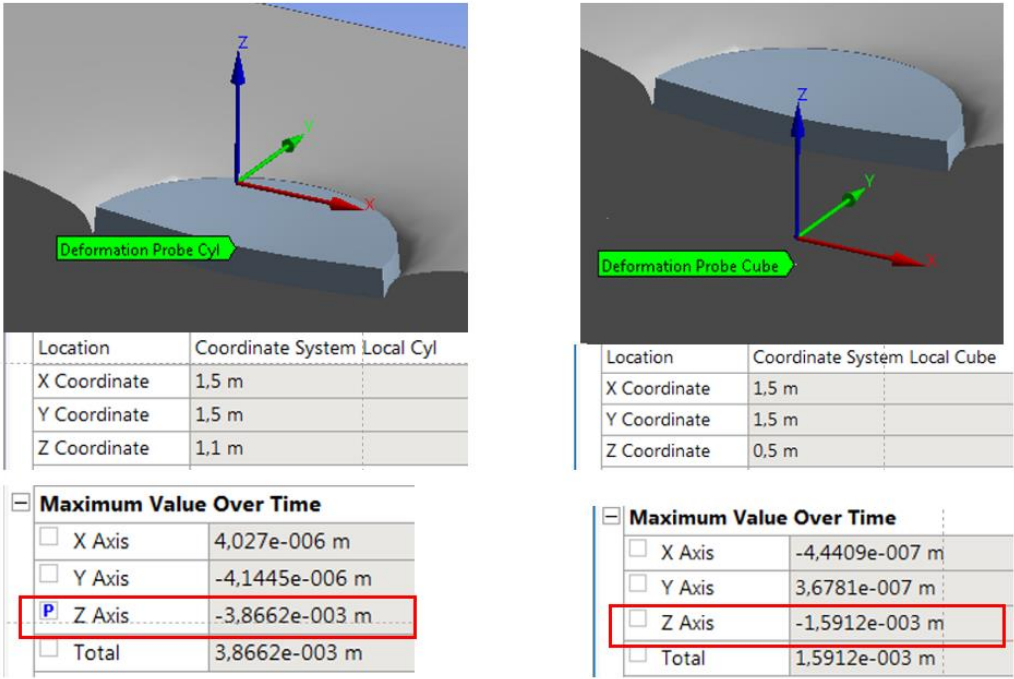


Рис. 4.13 Значения вертикальных перемещений в двух пробных точках: вертикальное перемещение штампа (слева) и вертикальное перемещения центра тяжести массива (справа).

Вертикальное перемещение штампа равно – **0,00387** м

Вертикальные перемещения в центральной точке массива равно **-0,00159** м.

Как видно, результаты решения, проведенных в двух разных комплексах, практически совпадают.

4.4 Расчет изменения порового давления в грунте под действием объемного притока жидкости

Исследуется фильтрация жидкости в грунте под действием ее объемной закачки. Расчетная область представляет собой параллелепипед размерами 2х2х1 метров. Область грунта с объемным притоком флюида расположена вертикально в центре грунтового пласта, проходит через всю его толщу и имеет форму вытянутого по высоте параллелепипеда размерами 0,1х0,1х1 метров. Грунт моделируется однослойной изотропной средой.

Константы задачи приведены в Таблице 1. Вид расчетной области показан на рис.4.14, а результаты с цветовой индикацией вычисленного давления приведены на рис.4.15. Дебит q области объемной закачки постоянен и составляет $10 \text{ м}^3/\text{сут}$.

Таблица 1.

Толщина слоя, м	Горизонт залегания, м	Коефф. фильтрации в горизонтальной плоскости, м/сут	Коефф. фильтрации вертикальный, м/сут	Пористость, %	Модуль Юнга, МПа	Коефф. Пуассона	Плотность твердой фазы грунта, кг/м ³	Плотность жидкой фазы, кг/м ³	Сжимаемость жидкой фазы, 1/Па
1	от -1.0 до 0.0	10	10	20	490	0,3	2500	1000	5*10E-10

Таблица 1. Входные данные в задаче.

Для проведения корректного сравнения численного расчета с доступным аналитическим решением принимаются следующие ограничения. Действие силы тяжести не учитывается. Наличие водоупорных слоев выше и ниже рассматриваемого слоя грунта моделируется граничным условием непротекания воды через подошву $\Sigma_{\text{низ}}$ и верхнюю поверхность слоя $\Sigma_{\text{верх}}$:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\Sigma_{\text{верх}}} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\Sigma_{\text{низ}}} = 0$$

На боковой поверхности расчетной области ставится условие для удаленной границы с нулевыми давлением, нормальным перемещением и касательным напряжением:

$$p|_{\Sigma_{\text{бок}}} = 0, \quad u_n|_{\Sigma_{\text{бок}}} = 0, \quad \vec{\tau}|_{\Sigma_{\text{бок}}} = 0.$$

Рассматривается установившаяся фильтрация, для чего в методике полагают значение расчетного интервала времени равным 10-ти суткам, а шаг дискретизации по времени равным 1-м суткам.

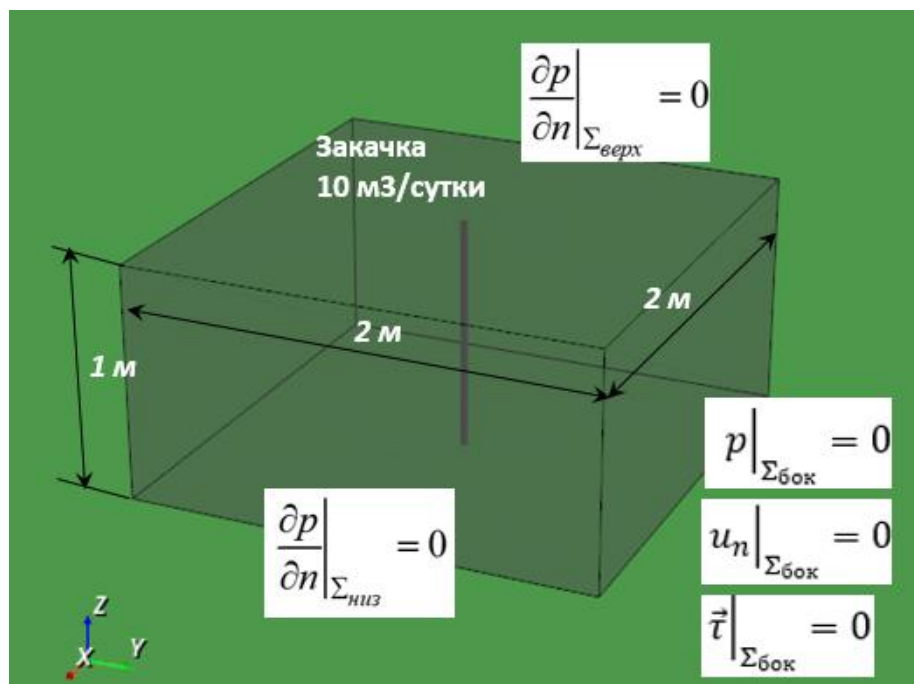


Рис. 4.14 Вид расчетной области с условиями на границах

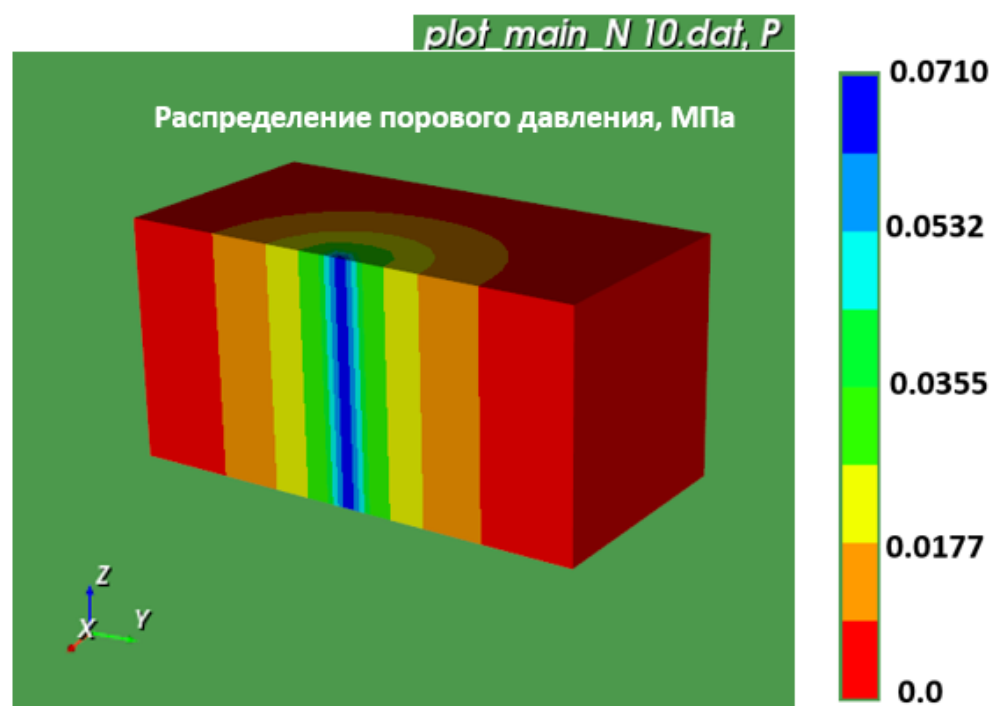


Рис.4.15 Распределение порового давления, МПа (установившийся режим). Сечение проходит через ось скважины.

Для грунтового массива цилиндрической формы при центральном расположении области закачки в виде цилиндрической поверхности (модель так называемой нагнетательной скважины) задача обладает осевой симметрией, поэтому для получения аналитического решения разумно использовать цилиндрическую систему координат. В ней изменение порового давления p удовлетворяет следующему уравнению, дополненному граничным условием, поставленным на поверхности скважины:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k_{rr}}{\rho^{\text{ж}} g} \cdot r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0, \quad \frac{k_{rr}}{\rho^{\text{ж}} g} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\frac{\gamma}{2\pi r_0 l}$$

Оба уравнения записаны в цилиндрических координатах (r, φ, z) с учетом осевой симметрии. Решением уравнения в цилиндрической области служит логарифмическая кривая:

$$p(r) = \frac{\gamma}{2\pi l} \cdot \frac{\rho^{\text{ж}} g}{k_{rr}} \ln \frac{r}{R}$$

где через R обозначено расстояние от скважины до боковой границы цилиндрической области, r_0 - радиус скважины, а l - длина скважины. В нашем случае $R = 1$ м, $l = 1$ м. График сравнения численного и аналитического решений приведен на рис. 4.16. Сравнение решений проводится, начиная с расстояния 0,1 м от скважины так, как при $r \rightarrow 0$ в аналитическом решении давление неограниченно возрастает. Как видно из рисунка, оба графика хорошо совпадают. Массив числовых значений, сравниваемых на рис. 4.16 решений, приведен в Таблице 2. Анализ числовых значений из таблицы показывает, что средняя на интервале решения ошибка не превосходит 10%. Отклонение значений в численном и аналитическом решениях объясняется тем, что используемая в численном решении объемная закачка флюида заданной интенсивности в объеме в форме параллелепипеда заменяется в аналитическом расчете поверхностным притоком жидкости той же интенсивности через цилиндрическую поверхность, моделирующую скважину. Что необходимо для существования аналитического решения.

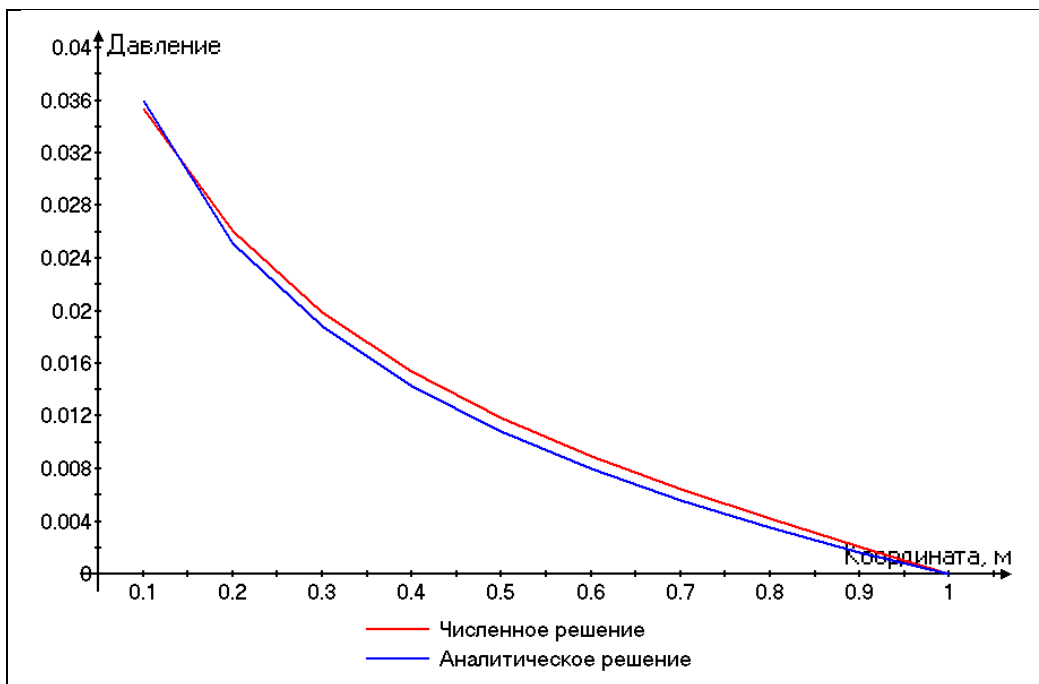


Рис.4.16 Графики сравнения численного решения и аналитического. Десятые сутки.

Таблица 2.

r (м) - координата	$\rho_{\text{числ.}}$ - численное решение (МПа)	$\rho_{\text{аналит.}}$ - аналитическое решение (МПа)
0.1	0.03536	0.03595
0.2	0.02607	0.02513
0.3	0.01984	0.0188
0.4	0.01539	0.01431
0.5	0.0119	0.01082
0.6	0.008986	0.007976
0.7	0.006459	0.005569
0.8	0.004182	0.003484
0.9	0.002055	0.001645
1.0	0.0	0.0

Таблица 2. Числовые данные сравниваемых решений.

4.5 Расчет изменения порового давления и деформаций в грунте под действием перепада давления, задаваемого на границе области

Исследуется фильтрация жидкости в грунте под действием заданного на границе расчетной области перепада порового давления. Расчетная область представляет собой параллелепипед размерами 2х2х1 метров (рис.4.17).

Грунт моделируется однослойной средой. Константы задачи приведены в таблице 3. Задаваемое на части границы поровое давление $p_0 = 1$ МПа.

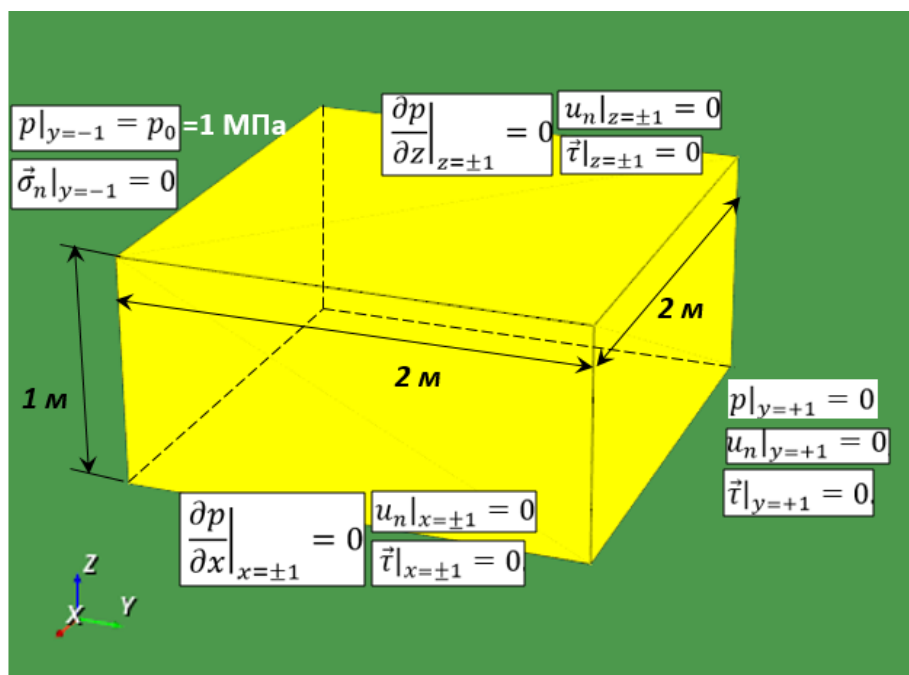


Рис.4.17 Расчетная область и условия на границах

Сечения расчетной области с цветовой индикацией вычисленных температуры и перемещения в направлении оси Oy приведен на рис. 4.18 и рис. 4.19, соответственно.

Таблица 3.

Толщина слоя, м	Горизонт залегания, м	Коефф. фильтрации в горизонтальной плоскости, м/сут	Коефф. фильтрации вертикальный, м/сут	Пористость, %	Модуль Юнга, МПа	Коефф. Пуассона	Плотность твердой фазы грунта, кг/м³	Плотность жидкой фазы, кг/м³	Сжимаемость жидкой фазы, 1/Па
1	от -1.0 до 0.0	10	10	20	490	0,3	2500	1000	5*10E-10

Таблица 3. Входные данные в задаче.

Для проведения корректного сравнения численного расчета с доступным аналитическим решением принимаются следующие ограничения. Действие силы тяжести не учитывается.

На боковой поверхности расчетной области в направлении оси Ox ставится условие типа «удаленной границы» для каркаса и условие непроницаемости для жидкости:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=\pm 1} = 0, \quad u_n|_{x=\pm 1} = 0, \quad \vec{\tau}|_{x=\pm 1} = 0.$$

На боковой поверхности расчетной области в направлении оси Oy задается условие на поровое давление:

$$p|_{y=-1} = p_0, \quad \vec{\sigma}_n|_{y=-1} = 0, \quad p|_{y=+1} = 0, \quad u_n|_{y=+1} = 0, \quad \vec{\tau}|_{y=+1} = 0.$$

На верхней и нижней границе расчетной области ставится условие непроницаемости границы для жидкости и условие типа «удаленной границы» для каркаса:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=\pm 1} = 0, \quad u_n|_{z=\pm 1} = 0, \quad \vec{\tau}|_{z=\pm 1} = 0.$$

Рассматривается установившаяся фильтрация, для чего в методике полагают значение расчетного интервала времени равным 10-ти суткам, а шаг дискретизации по времени равным 1-м суткам.

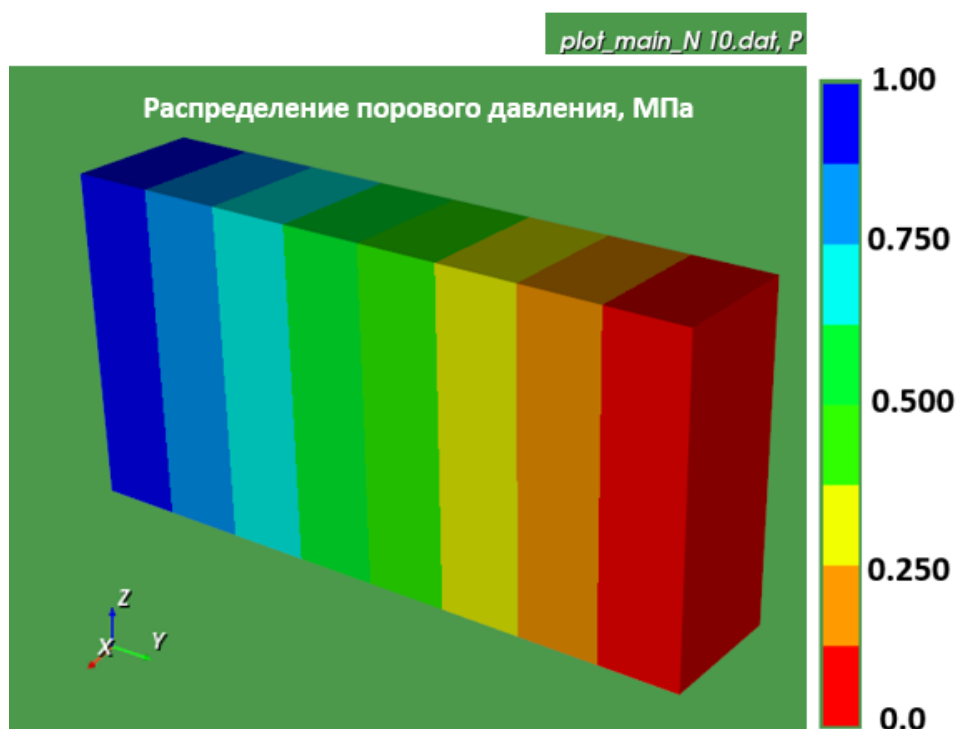


Рис.4.18 Распределение порового давления, МПа (установившийся режим). Давление изменяется линейно вдоль оси Y .

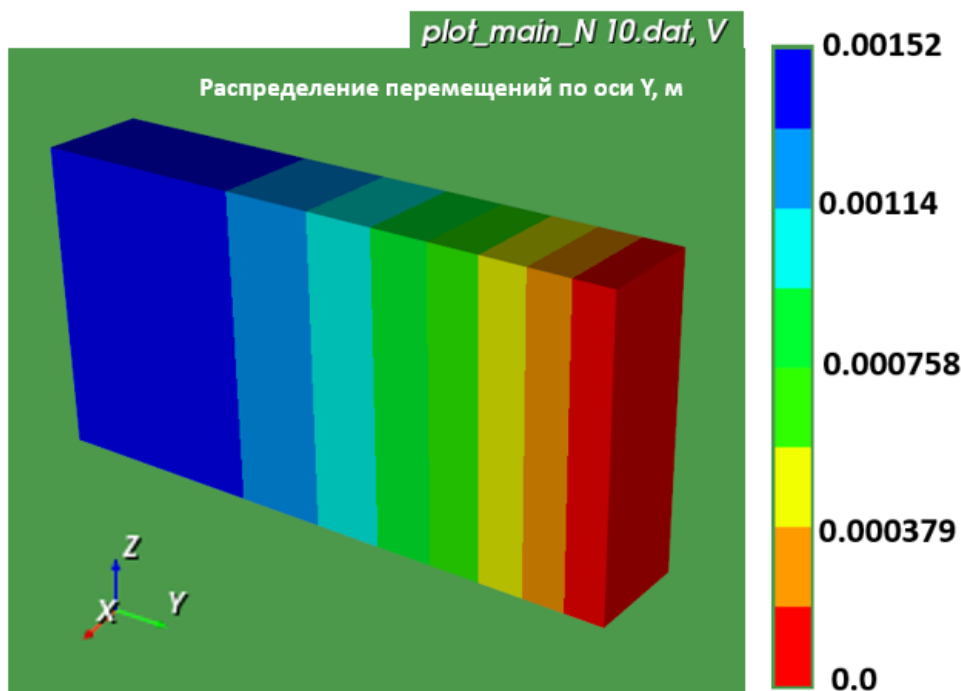


Рис.4.19 Распределение перемещений, метры (установившийся режим). Перемещения изменяются по квадратичной зависимости вдоль оси Y.

В декартовой системе координат задача является одномерной. Изменение порового давления p и осевое перемещение u_y удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_{yy}}{\rho^g g} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0, \quad (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial y}$$

Решением данных уравнений при указанных граничных условиях будет линейное по координате распределение давления p и квадратичное распределение перемещения u_y :

$$p(y) = p_0 \cdot \frac{1-y}{2}, \quad u_y = \frac{p_0}{4(\lambda + 2\mu)} \cdot (1-y) \cdot (3+y)$$

Массив числовых значений сравниваемых в численном и аналитическом решениях давления и перемещении приведен в Таблице 4.

Таблица 4.

y (м) - координата	$p_{\text{числ.}}$ - численное решение (МПа)	$p_{\text{аналит.}}$ - аналитическое решение (МПа)	u_y числ - численное решение (м)	u_y аналит - аналитическое решение (м)
-1.0	1.00	1.00	0.001516	0.001516
-0.9	0.95	0.95	0.001512	0.001512
-0.8	0.90	0.90	0.001501	0.001501
-0.7	0.85	0.85	0.001482	0.001482
-0.6	0.80	0.80	0.001455	0.001455
-0.5	0.75	0.75	0.001421	0.001421
-0.4	0.70	0.70	0.001380	0.001380
-0.3	0.65	0.65	0.001330	0.001330
-0.2	0.60	0.60	0.001273	0.001273

-0.1	0.55	0.55	0.001209	0.001209
0.0	0.50	0.50	0.001137	0.001137
0.1	0.45	0.45	0.001057	0.001057
0.2	0.40	0.40	0.0009703	0.0009703
0.3	0.35	0.35	0.0008755	0.0008755
0.4	0.30	0.30	0.0007732	0.0007732
0.5	0.25	0.25	0.0006633	0.0006633
0.6	0.20	0.20	0.0005458	0.0005458
0.7	0.15	0.15	0.0004207	0.0004207
0.8	0.10	0.10	0.0002880	0.0002880
0.9	0.05	0.05	0.0001478	0.0001478
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Таблица 4. Числовые данные сравниваемых решений.

Сравнение числовых значений из таблицы показывает полное совпадение результатов численного и аналитического расчетов.

4.6 Расчет тепловых деформаций в бетоне под действием перепада температур, задаваемого на границе области

Исследуется термомеханическое НДС в бетонном кубике под действием заданного на границе расчетной области перепада поля температур (рис.4.20). Размеры расчетной области равны 2х2х2 метра. Константы задачи приведены в Таблице 5. На грани куба $y = -1$ м поддерживается постоянная температура $T_0 = 100$ °С, на грани $y = +1$ м поддерживается постоянная нулевая температура. На всех других гранях наложено условие теплоизоляции. Температура начального недеформированного состояния $T_{ref} = 0$ °С. Сечения расчетной области с цветовой индикацией вычисленных температуры и перемещения в направлении оси Oy приведен на рис.4.21 и рис.4.22, соответственно.

Таблица 5.

Коефф. теплопроводности горизонтальный, Вт/м/градус	Коефф. теплопроводности вертикальный, Вт/м/градус	Коефф. удельной теплоемкости, Дж/кг/градус	Модуль Юнга, МПа	Коефф. Пуассона	Плотность, кг/м³	Температура начального недеформированного состояния, градус	Коефф. линейного теплого расширения, 1/градус
10	10	840	28000	0,3	2400	0	0.000012

Таблица 5. Входные данные в задаче.

Для проведения корректного сравнения численного расчета с доступным аналитическим решением принимаются следующие ограничения. Действие силы тяжести не учитывается. На верхнем и нижнем основании куба ставится условие равенства нулю нормальных перемещений и касательных напряжений и условие теплоизолированности границы:

$$u_n|_{z=\pm 1} = 0, \quad \vec{\tau}|_{z=\pm 1} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{z=\pm 1} = 0.$$

На боковой поверхности расчетной области в направлении оси Ox ставится условие для удаленной границы:

$$u_n|_{x=\pm 1} = 0, \quad \vec{\tau}|_{x=\pm 1} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{x=\pm 1} = 0.$$

На боковой поверхности расчетной области в направлении оси Oy задается условие на температуру, нормальные перемещения и напряжения:

$$T|_{y=-1} = T_0, \quad \vec{\sigma}_n|_{y=-1} = 0, \quad T|_{y=+1} = 0, \quad u_n|_{y=+1} = 0, \quad \vec{\tau}|_{y=+1} = 0.$$

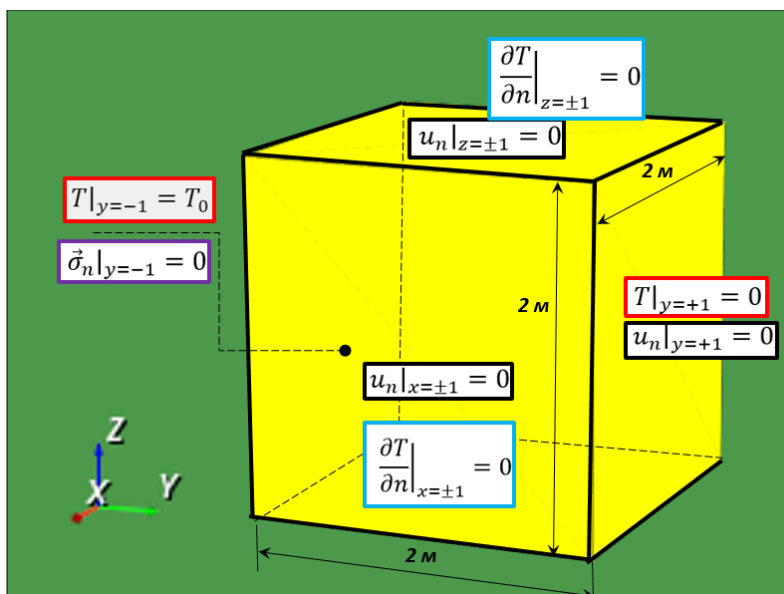


Рис.4.20 Расчетная область и условия на границах

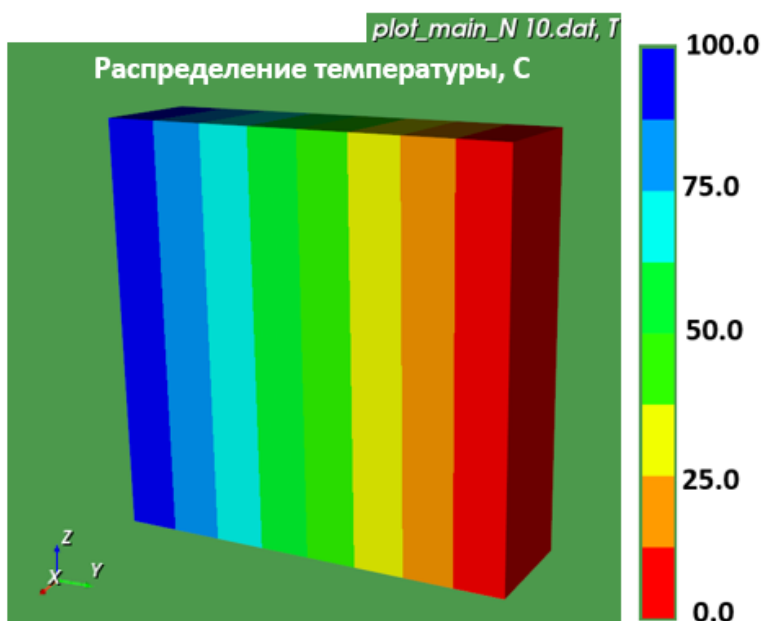


Рис.4.21 Распределение температуры (соответствует установившемуся режиму). Плоскость сечения параллельна плоскости YOZ. Температура меняется линейно вдоль оси Y.

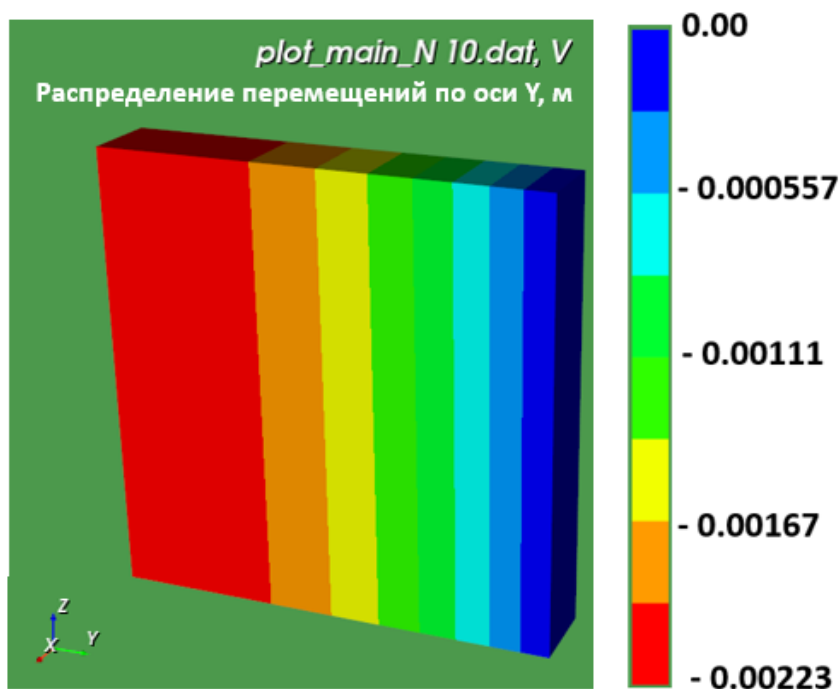


Рис.4.22 Распределение перемещений, м (соответствует установившемуся температурному режиму). Плоскость сечения параллельна плоскости YOZ. Перемещения меняются квадратично вдоль оси Y (рис.4.23).



Рис.4.23 График распределение перемещений вдоль оси Y (квадратичная зависимость от расстояния по оси Y от закрепленной грани). Плоскость куба с координатой Y = 1 м закреплена по условию задачи. Поэтому перемещение имеет знак «минус».

Рассматривается установившаяся теплопроводность, для чего в численном расчете полагают значение расчетного интервала времени равным 100 суткам, а шаг дискретизации по времени равным 10-ти суткам. В декартовой системе координат задача является одномерной. Изменение температуры T и осевое перемещение u_y удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yy} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0, (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = 3\alpha K \frac{\partial T}{\partial y}$$

Решением данных уравнений при указанных граничных условиях будет линейное по координате распределение температуры T и квадратичное распределение перемещения u_y :

$$T(y) = T_0 \cdot \frac{1-y}{2}, u_y = T_0 \frac{3\alpha K}{4(\lambda + 2\mu)} \cdot (y-1) \cdot (y+3)$$

Массив числовых значений сравниваемых в численном и аналитическом решениях давлении и перемещении приведен в таблице 6.

Таблица 6.

y (м) - координата	$T_{\text{числ.}}$ - численное решение (°C)	$T_{\text{аналит.}}$ - аналитическое решение (°C)	u_y числ - численное решение (м)	u_y аналит - аналитическое решение (м)
-1.0	0.1000E+03	0.1000E+03	-.2229E-02	-.2229E-02
-0.9	0.9500E+02	0.9500E+02	-.2223E-02	-.2223E-02
-0.8	0.9000E+02	0.9000E+02	-.2206E-02	-.2206E-02
-0.7	0.8500E+02	0.8500E+02	-.2179E-02	-.2179E-02
-0.6	0.8000E+02	0.8000E+02	-.2140E-02	-.2140E-02
-0.5	0.7500E+02	0.7500E+02	-.2089E-02	-.2089E-02
-0.4	0.7000E+02	0.7000E+02	-.2028E-02	-.2028E-02
-0.3	0.6500E+02	0.6500E+02	-.1956E-02	-.1956E-02
-0.2	0.6000E+02	0.6000E+02	-.1872E-02	-.1872E-02
-0.1	0.5500E+02	0.5500E+02	-.1777E-02	-.1777E-02
0.0	0.5000E+02	0.5000E+02	-.1671E-02	-.1671E-02
0.1	0.4500E+02	0.4500E+02	-.1554E-02	-.1554E-02
0.2	0.4000E+02	0.4000E+02	-.1426E-02	-.1426E-02
0.3	0.3500E+02	0.3500E+02	-.1287E-02	-.1287E-02
0.4	0.3000E+02	0.3000E+02	-.1137E-02	-.1137E-02
0.5	0.2500E+02	0.2500E+02	-.9750E-03	-.9750E-03
0.6	0.2000E+02	0.2000E+02	-.8023E-03	-.8023E-03
0.7	0.1500E+02	0.1500E+02	-.6184E-03	-.6184E-03
0.8	0.9999E+01	0.1000E+02	-.4234E-03	-.4234E-03
0.9	0.4999E+01	0.5000E+01	-.2173E-03	-.2173E-03
1.0	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

Таблица 6. Числовые данные сравниваемых решений.

Сравнение числовых значений из таблицы показывает фактически полное совпадение результатов численного и аналитического расчетов.

Проекты для тестирования программы (их шесть) находятся в папке «**test_models**» (директория «**GeomechanICS**»). В нижеприведенной таблице приведен перечень файлов и данных для просмотра после выполнения расчета.

Номер теста	Наименование папки проекта	Загружаемый файл из папки с результатами « result »	Данные для просмотра	Краткое описание теста
1	4_1_input_quasistatic_1	plot_main_N 8.dat	W0 – перемещение по оси Z	Деформация балки под действием распределенной нагрузки
2	4_2_input_quasistatic_2_	plot_main_N 4.dat	W0 – перемещение по оси Z	Штамповая нагрузка на верхнюю грань куба (предписанное перемещение)
3	4_3_input_quasistatic_3	plot_main_N 5.dat	W0 – перемещение по оси Z	Штамповая нагрузка верхнюю грань прямоугольного параллелепипеда (распределенная нагрузка)
4	4_4_input_Filtration_Cylinder	plot_main_N 10.dat	P – поровое давление	Закачка воды в скважину, расположенную по оси прямоугольного параллелепипеда
5	4_5_input_Filtration_Cube	plot_main_N 10.dat	V0 – перемещение по оси Y P – поровое давление	Перепад порового давления P на противоположных гранях прямоугольного параллелепипеда
6	4_6_input_Thermo	plot_main_N 10.dat	V0 – перемещение по оси Y, T - температура	Перепад температуры T на противоположных гранях куба

Ниже приводится последовательность действий для проведения Теста № 1.

Что касается остальных тестов, все выполняется аналогично.

Запуск программного обеспечения

Программу (Препроцессор) можно запустить двумя способами:

- через меню «Пуск», выбрав соответствующую позицию из списка программ (рис.4.24, изображение слева)
- кликнув дважды ЛКМ на ярлыке, установленного на Рабочий стол (если при установке программы было выбрана опция создания ярлыка) – рис.4.24, изображение справа)

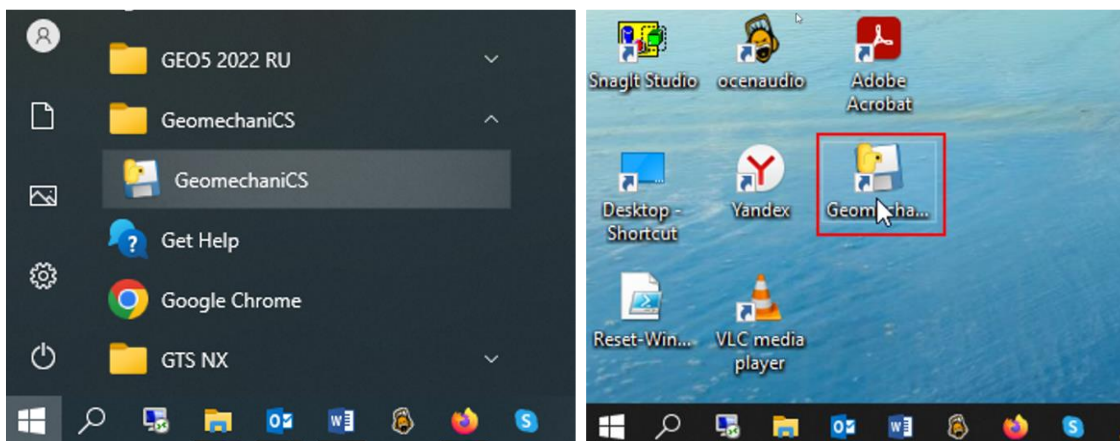


Рис. 4.24 Варианты запуска Препроцессора.

Открывается окно Препроцессора (рис. 4.25). Активируя пункт «Проект», в выпадающем меню выбирается позицию «Открыть проект».

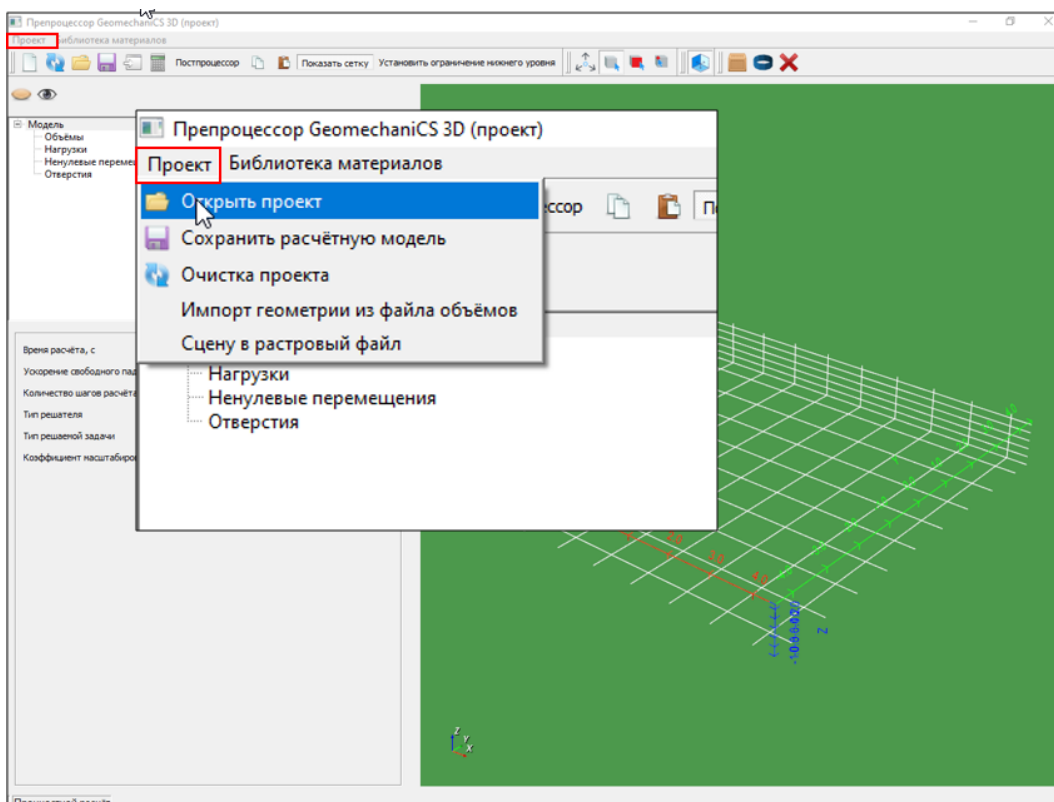


Рис. 4.25 Окно Препроцессора – открытие проекта.

Проекты для тестирования программы находятся в папке «**test_models**» (директория «**GeomechanICS**»). Через проводник Windows необходимо открыть папку «**4_1_input_quasistatic_1**», выбрать папку «**input**» (одним щелчком ЛКМ) и далее нажать кнопку «**Выбрать**» (рис. 4.26).

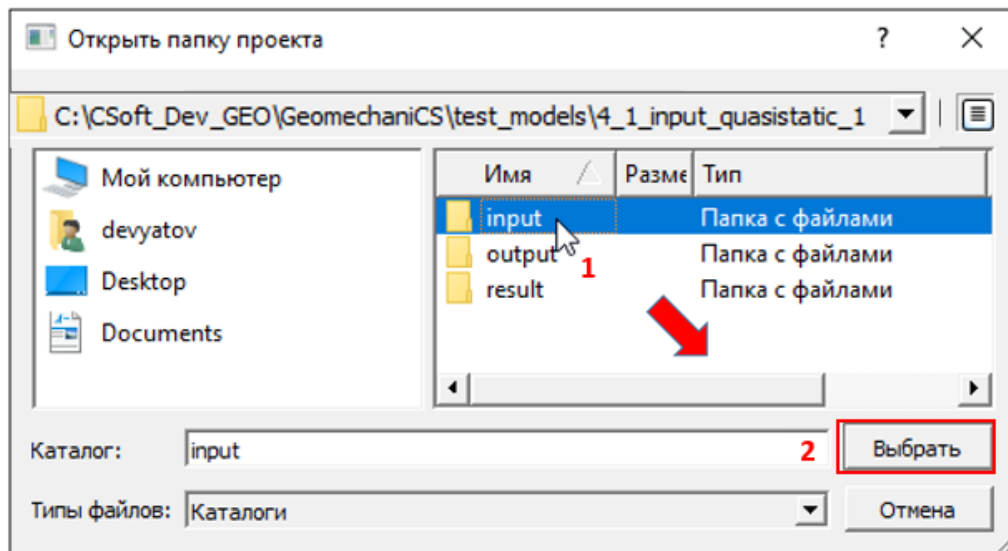


Рис.4.26 Последовательность действий при открытии проекта.

Модель загружается в Препроцессор (рис. 4.27).

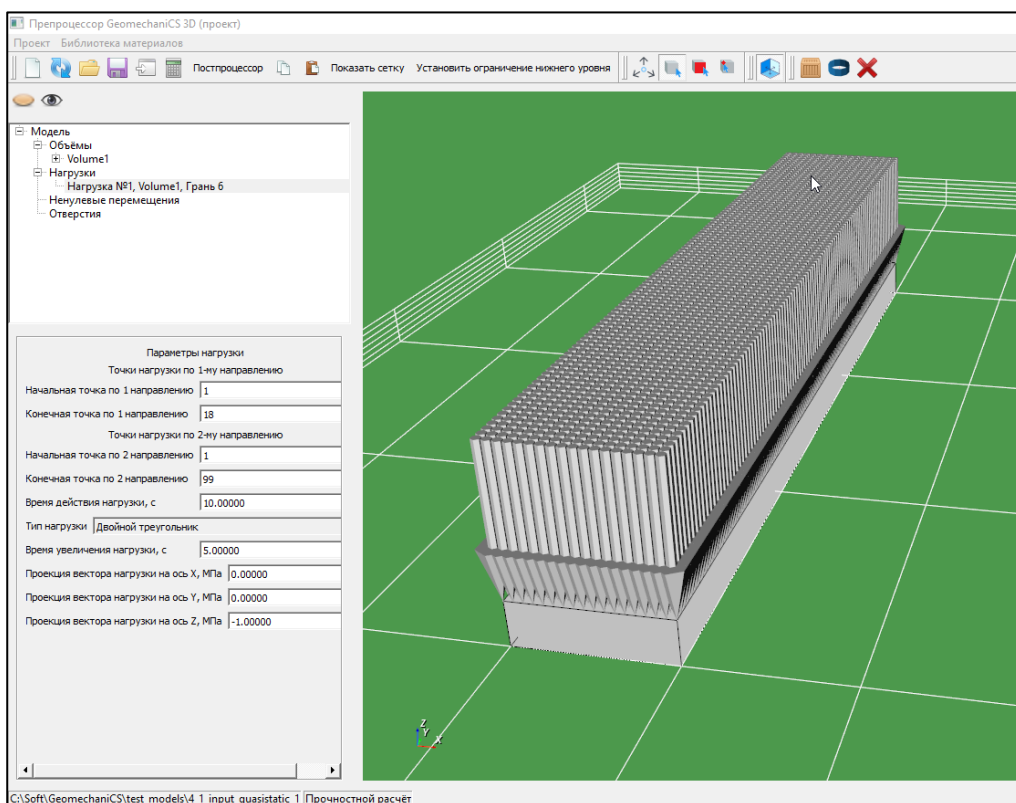


Рис. 4.27 Модель, загруженная в Препроцессор

Далее запускается расчет – нужно кликнуть кнопку «**Запуск расчета**» (рис. 4.28).

Открывается информационное окно **Процессора**, отражающего этапы вычислительного процесса.

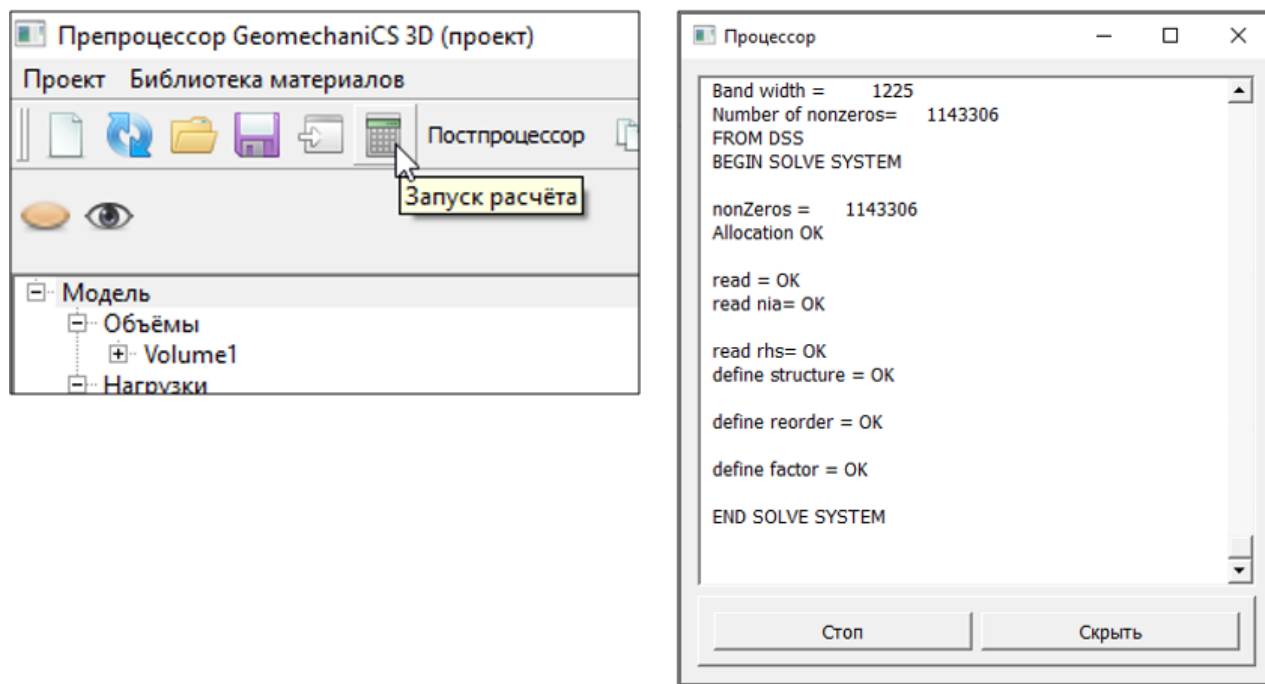


Рис. 2.28 Запуск модели на расчет и информационное окно Процессора.

После завершения вычислений, а также в процессе их выполнения можно загрузить Постпроцессор (Кнопка меню «Постпроцессор») (рис. 4.29) и проанализировать результаты для тех моментов времени, для которых они уже рассчитаны. В данном случае *следует дождаться конца вычислений*.

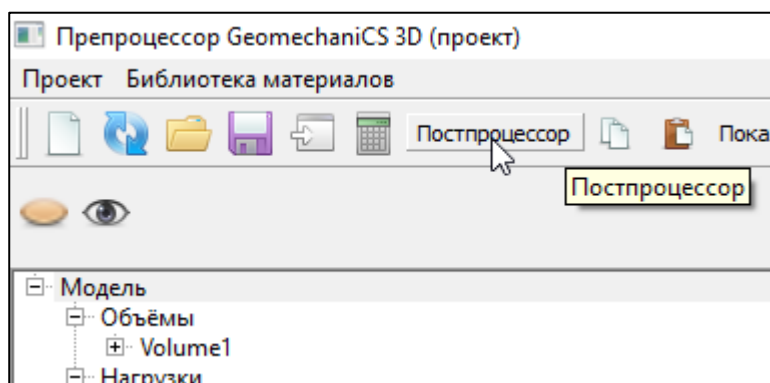


Рис. 4.29 Запуск Постпроцессора по окончании вычислений.

В настоящее время результаты представляются в виде цветовой индикации интересующего параметра (в объеме расчетной области, в сечении и в виде изолиний). Возможности постпроцессора будут расширены в следующих версиях.

Находясь в постпроцессоре прежде всего необходимо загрузить результаты. Для этого нужно кликнуть ЛКМ на пункт меню «Постпроцессинг», в выпавшем списке выбрать пункт «Результаты расчета» и кликнуть на него ЛКМ (рис. 4.30). Двойным щелчком открываем папку «4_1_input_quasistatic_1», где в папке «result» находятся результаты расчета.

Выполняем двойной щелчок ЛКМ на этой папке и раскрываем ее содержимое.

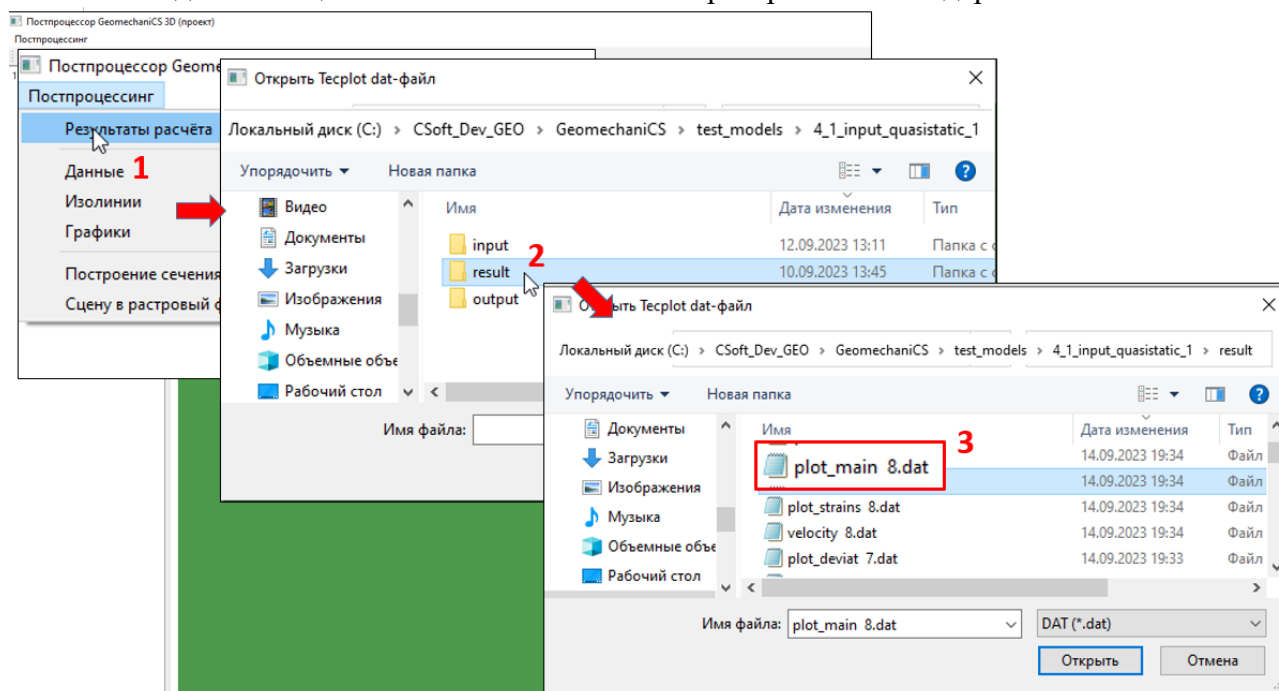


Рис. 4.30 Выбор необходимого файла, содержащего результаты расчета

Для анализа результатов выбирается файл «**plot_main 8.dat**» (двойным щелчком ЛКМ).

Результаты загружаются в постпроцессор. На экране появляется графическое изображение, интерпретирующее путем цветовой индикации один из расчетных параметров (соответствует переменной, обозначенной в верхней части списка пункта «Данные» (***S_{II}***)).

В данном случае интерес представляет переменная **W0** (перемещение по оси Z декартовой системы координат).

Чтобы отразить на экране распределение переменной **W0**, необходимо ее выбрать из списка переменных (рис.4.31): нужно кликнуть ЛКМ на позиции «Постпроцессинг», позиционировать курсор на пункте «Данные», перейти на открывшийся список переменных и кликнуть ЛКМ на переменной **W0**.

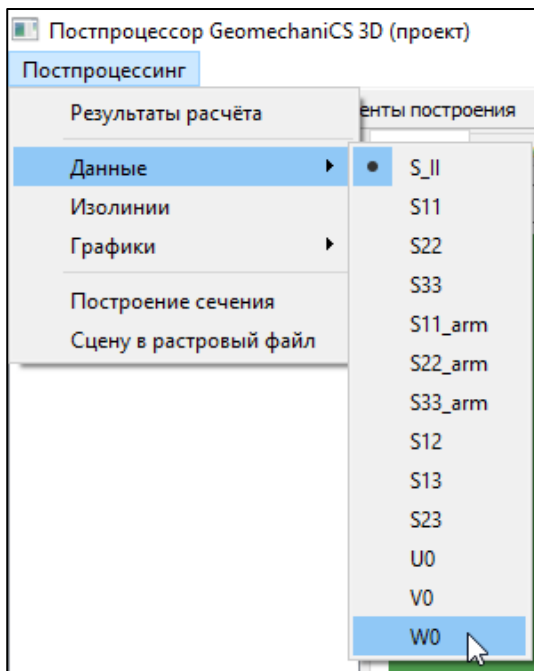


Рис. 4.31 Выбор переменной для отображения

Результат появится на экране (рис. 4.32)

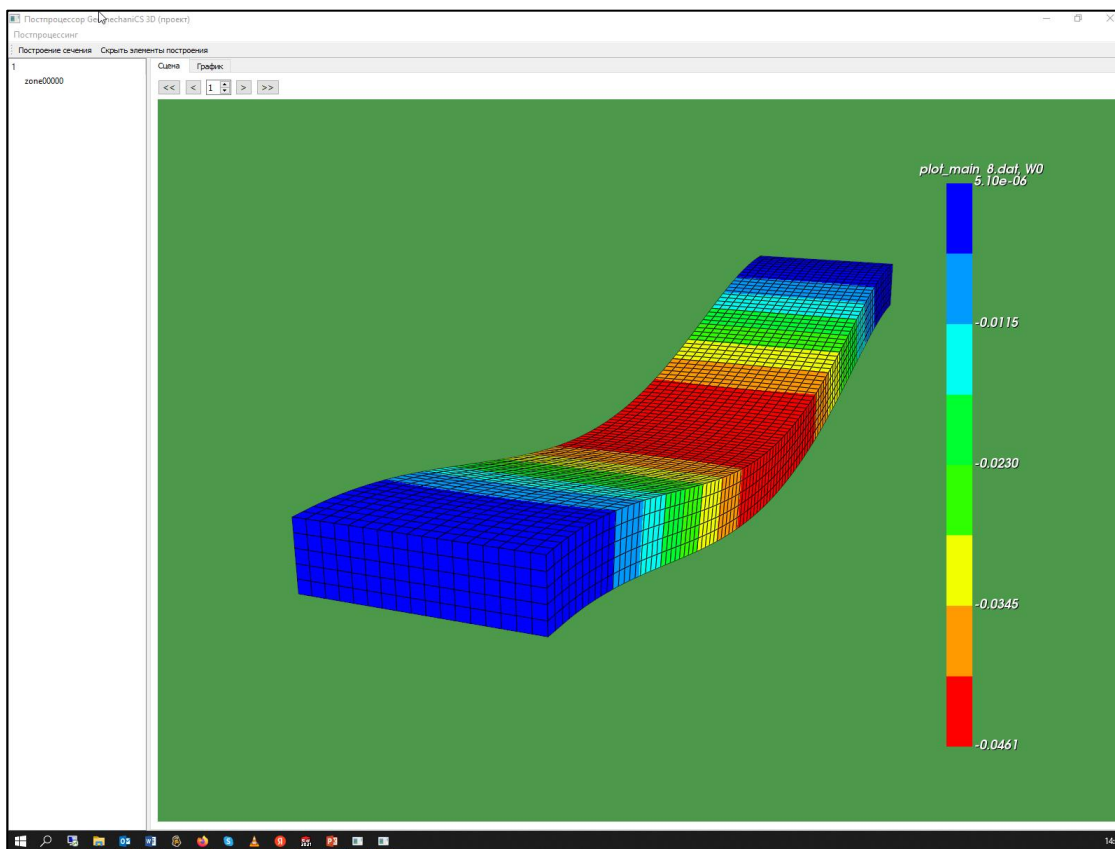


Рис.4.32 Цветографическое представление результата – вертикальное перемещение точек модели W0, м.

В нижеприведенной таблице приводятся приемы перемещения, изменения масштаба и вращения модели в окне.

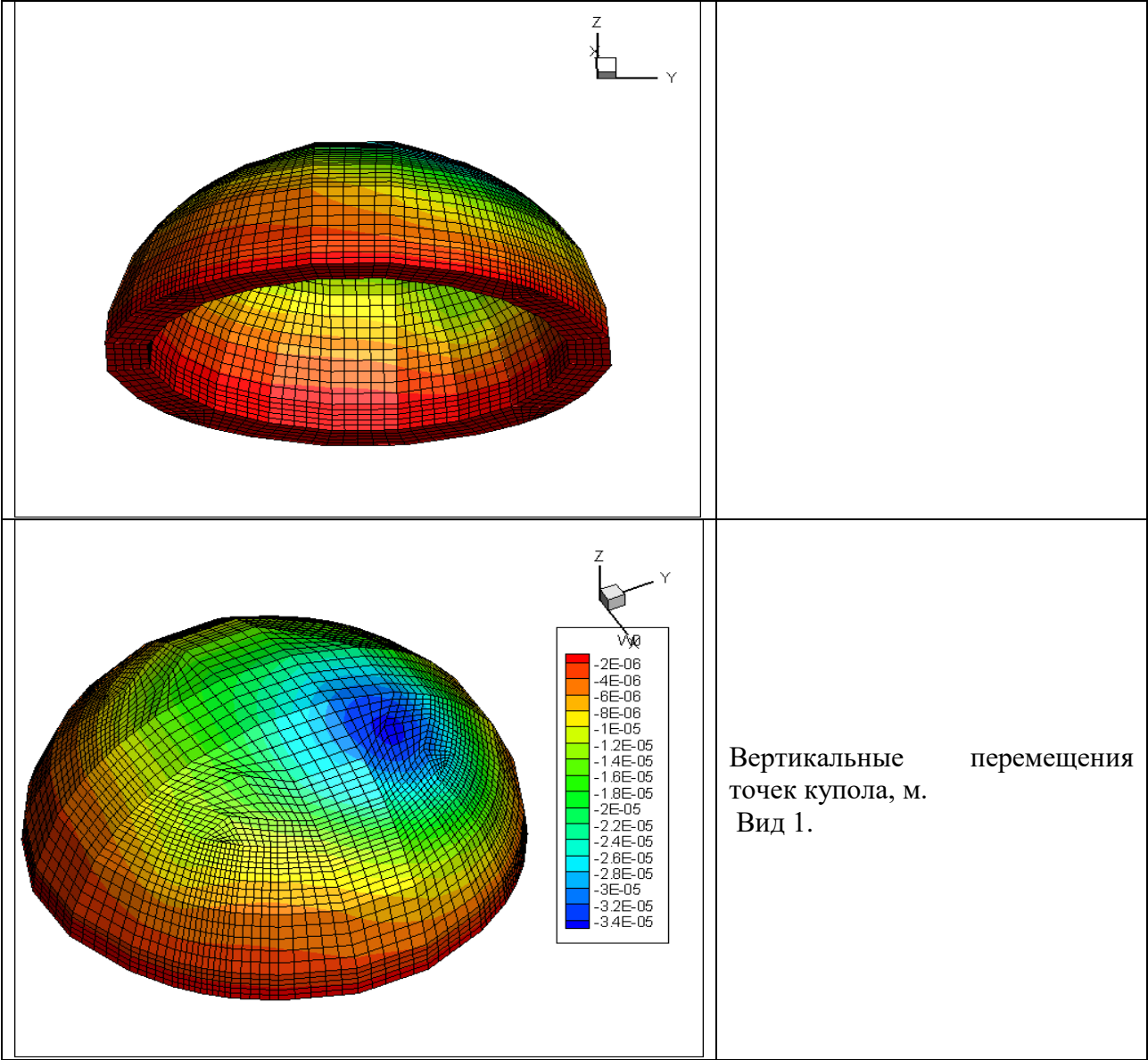
Манипуляции с моделью	
Перемещение объектов	Нажать ЛКМ и, удерживая ее, сначала слегка переместить по горизонтали, а затем двигать в нужном направлении
Увеличение/Уменьшение изображения	Нажать ЛКМ и, удерживая ее, двигать вниз (увеличение) или вверх (уменьшение).
Поворот вокруг намеченной точки	Кликнуть на объекте ЛКМ . Появится небольшая сфера. Это будет центр вращения. Затем нажать ЛКМ , и удерживая ее, двигать в нужном направлении. Когда кнопка будет отпущена, то сфера исчезнет. Чтобы продолжить вращение, нужно действия повторить.

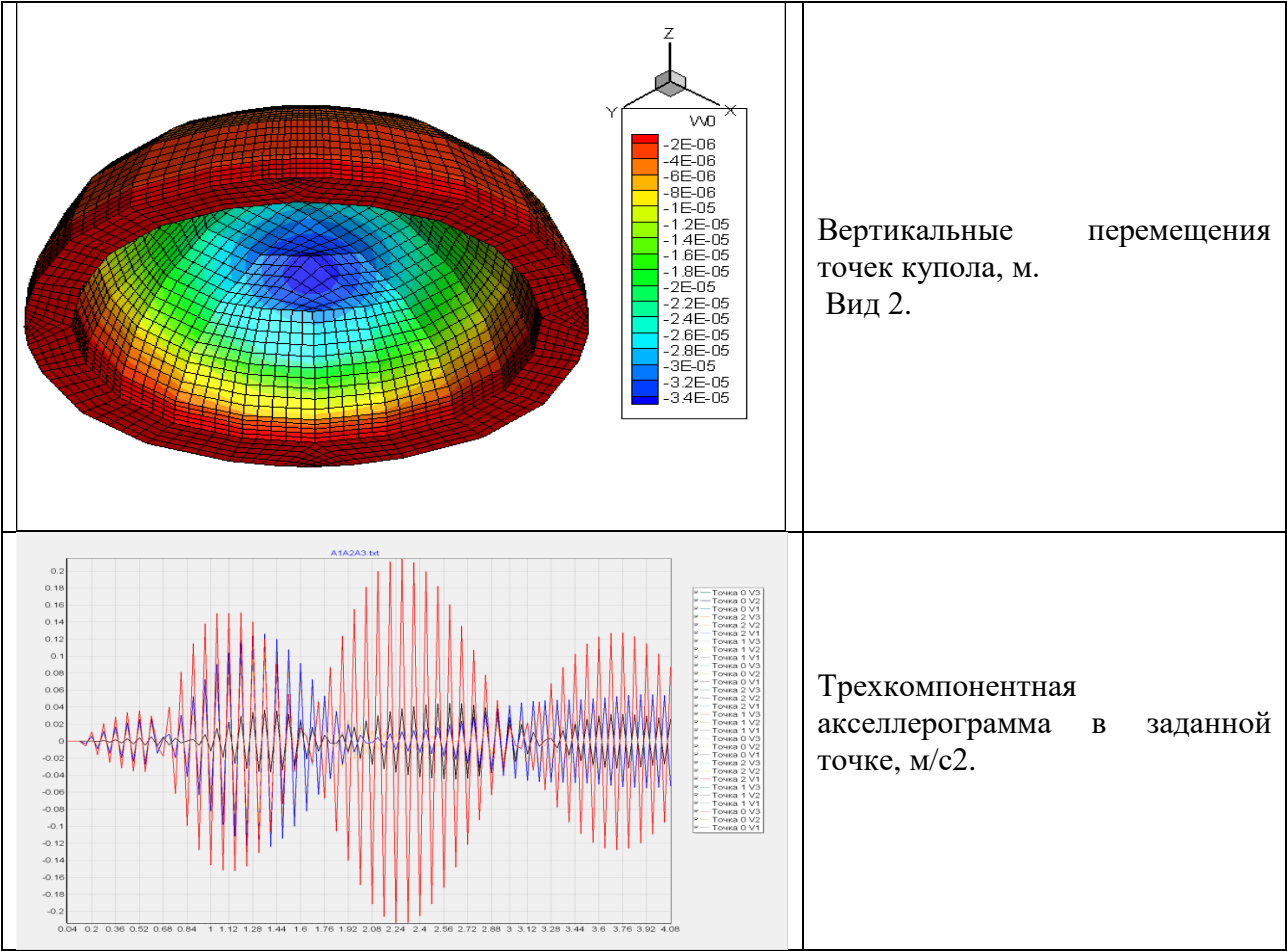
При необходимости можно воспользоваться опциями построения сечений модели и построения изолиний (информация об этом приведена в **Руководстве пользователя**).

Глава 5. Примеры решения практических задач

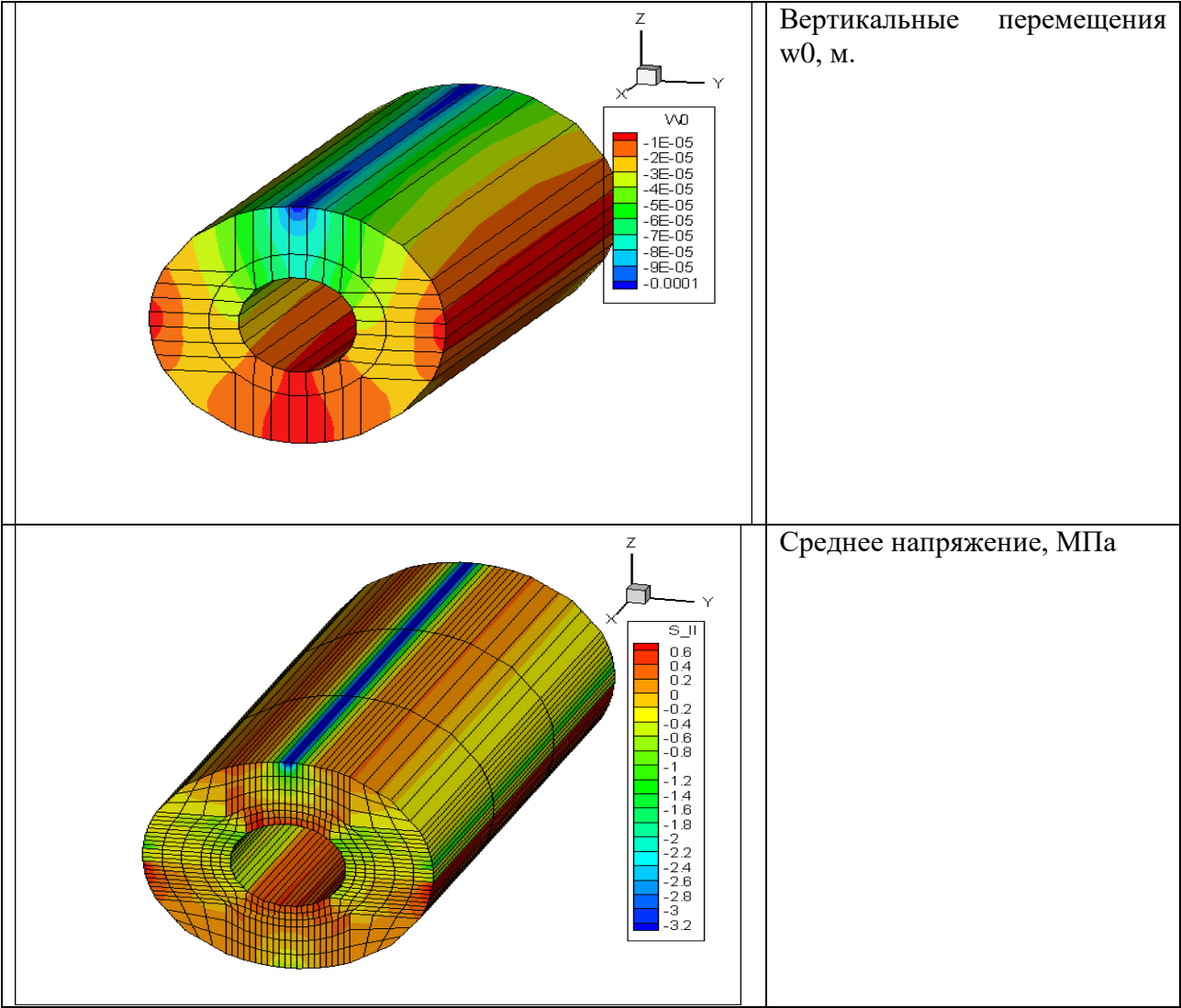
В данной главе приводятся примеры решения задач, выполненных по заказу ряда организаций.

5.1. Несимметричный удар по железобетонному куполу.

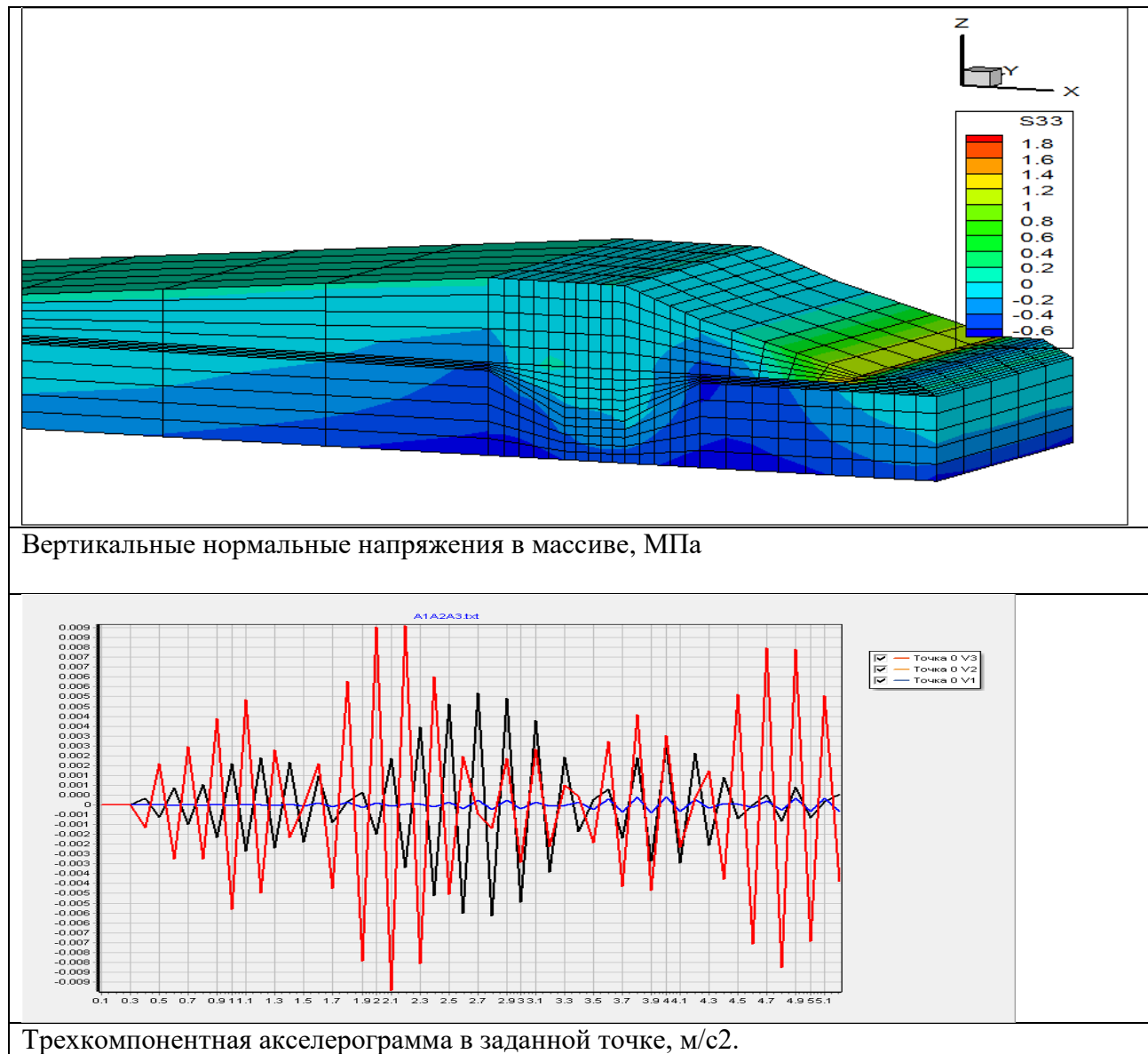




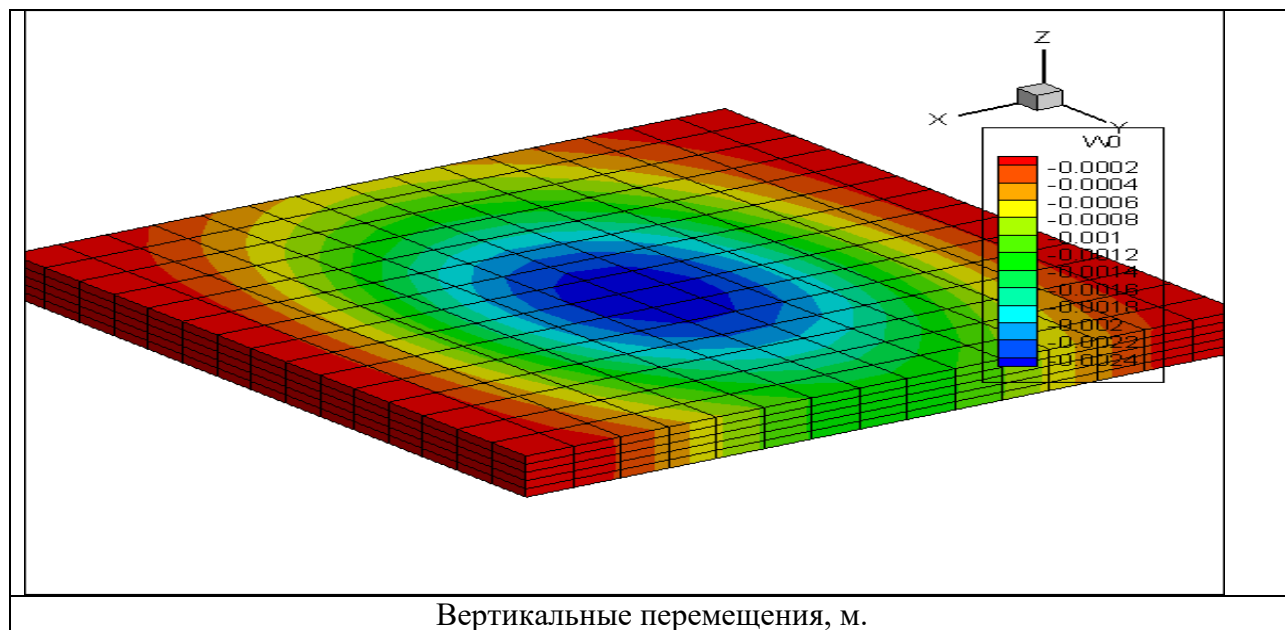
5.2. Расчет толстостенной двухслойной обделки метро



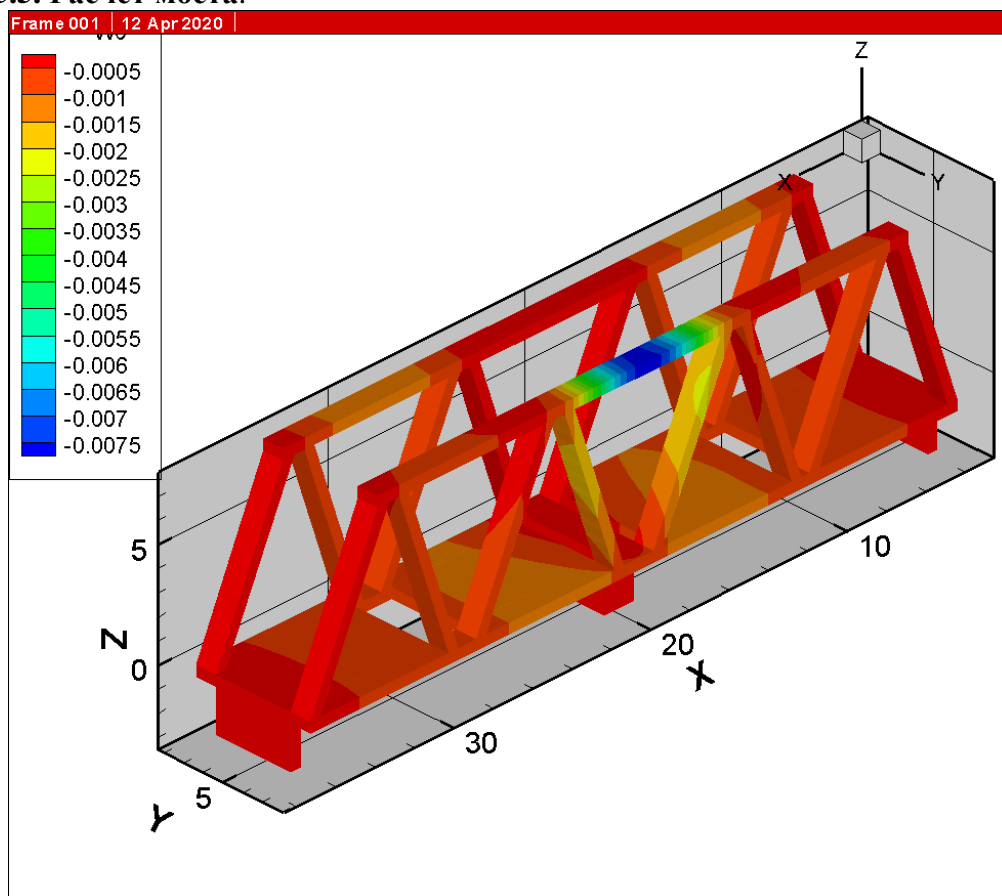
5.3. Расчет грунтовой плотины.



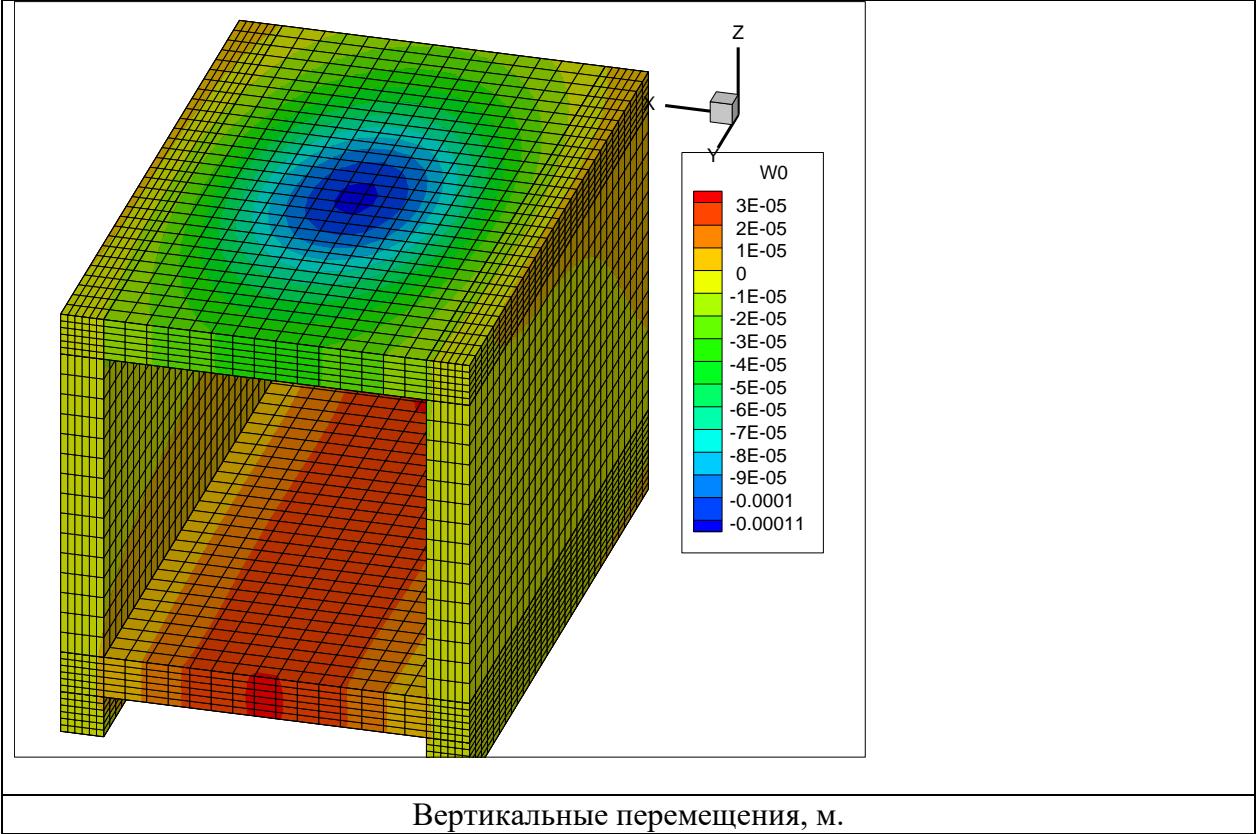
5.4. Расчет железобетонной плиты.



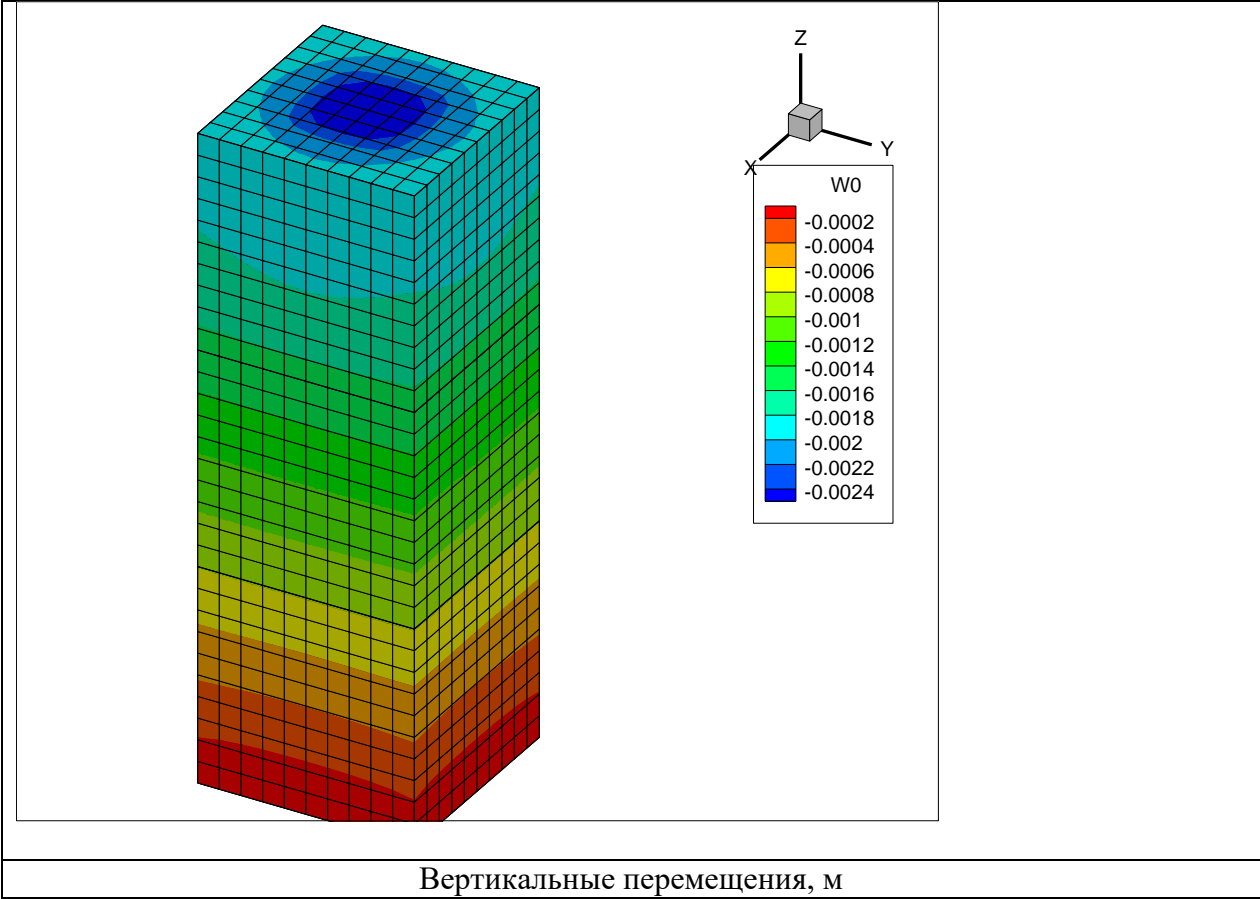
5.5. Расчет моста.



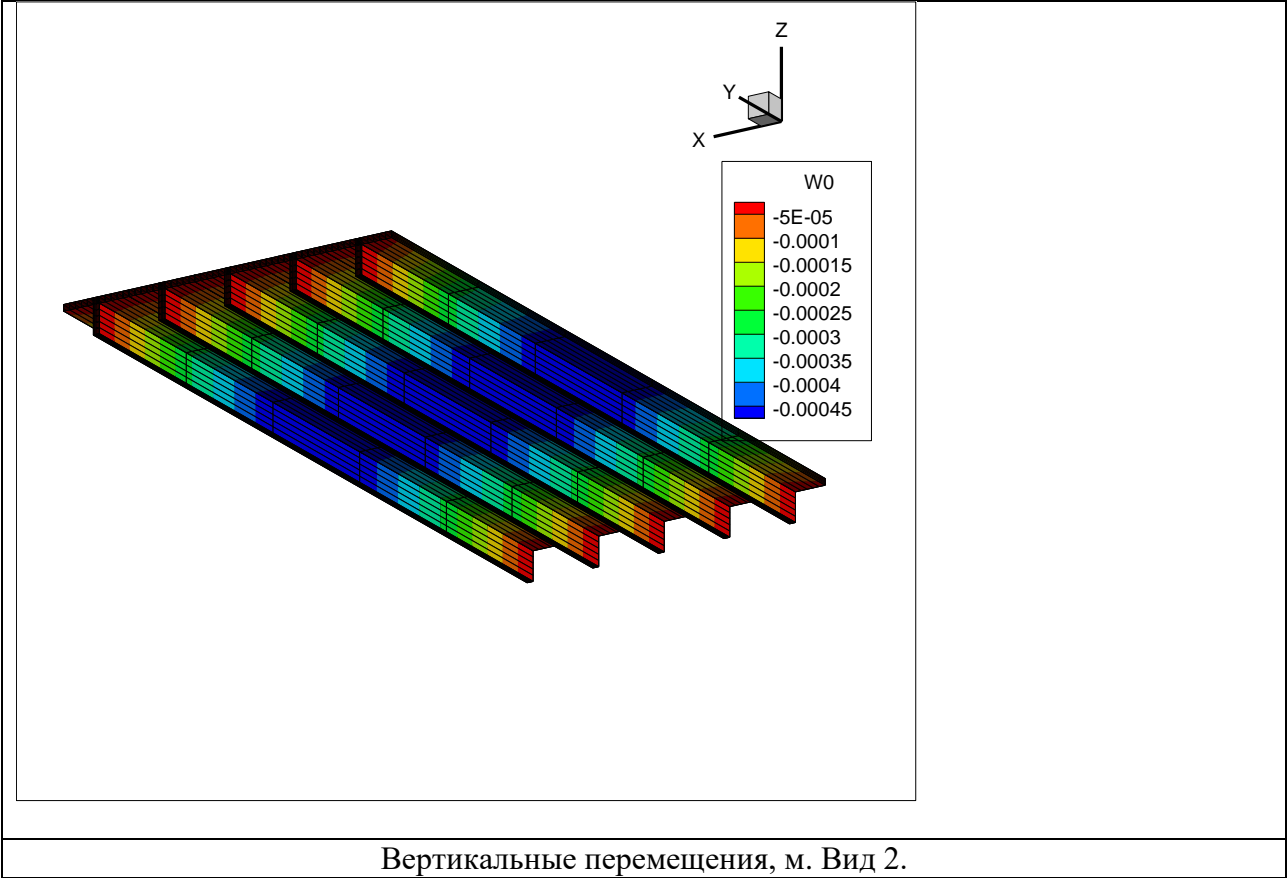
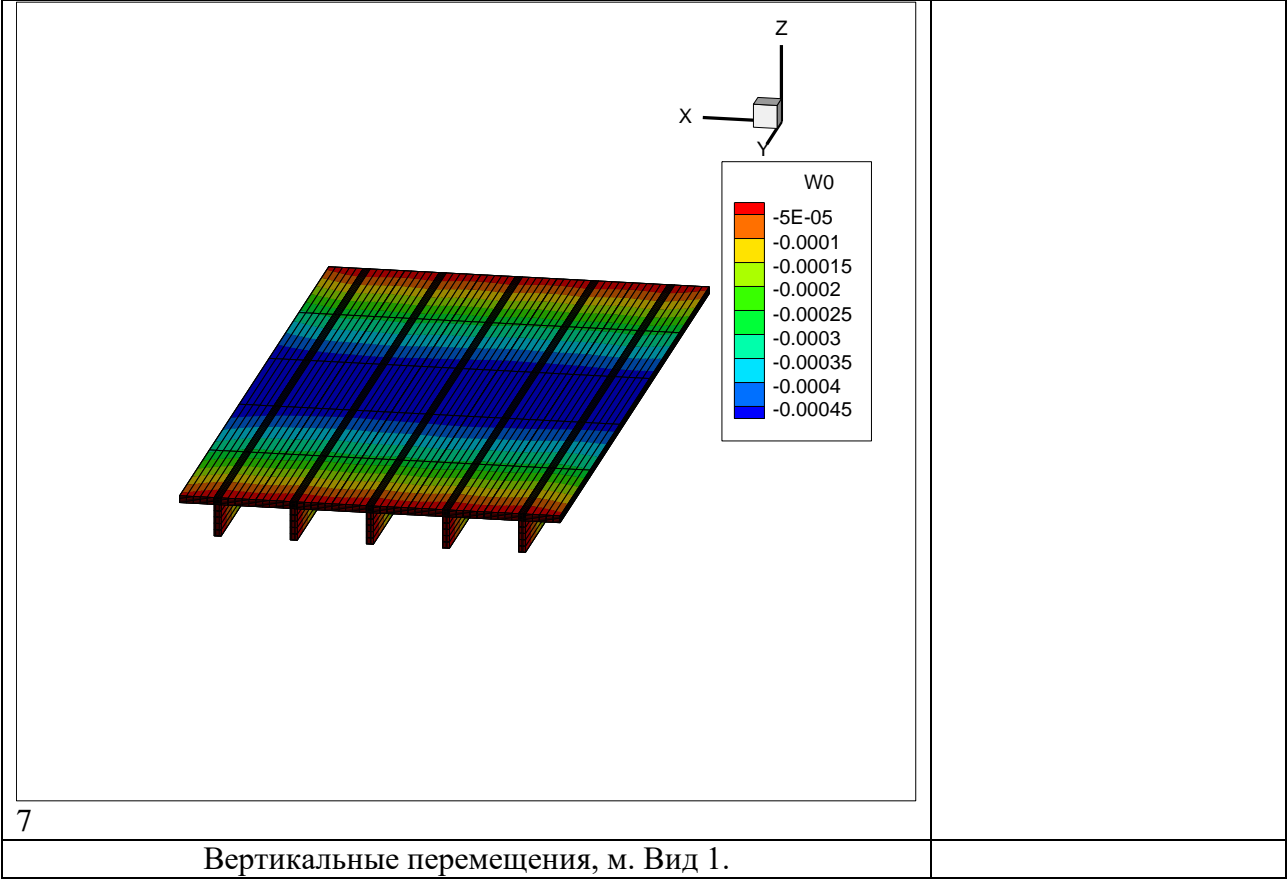
5.6 Расчет железобетонного короба



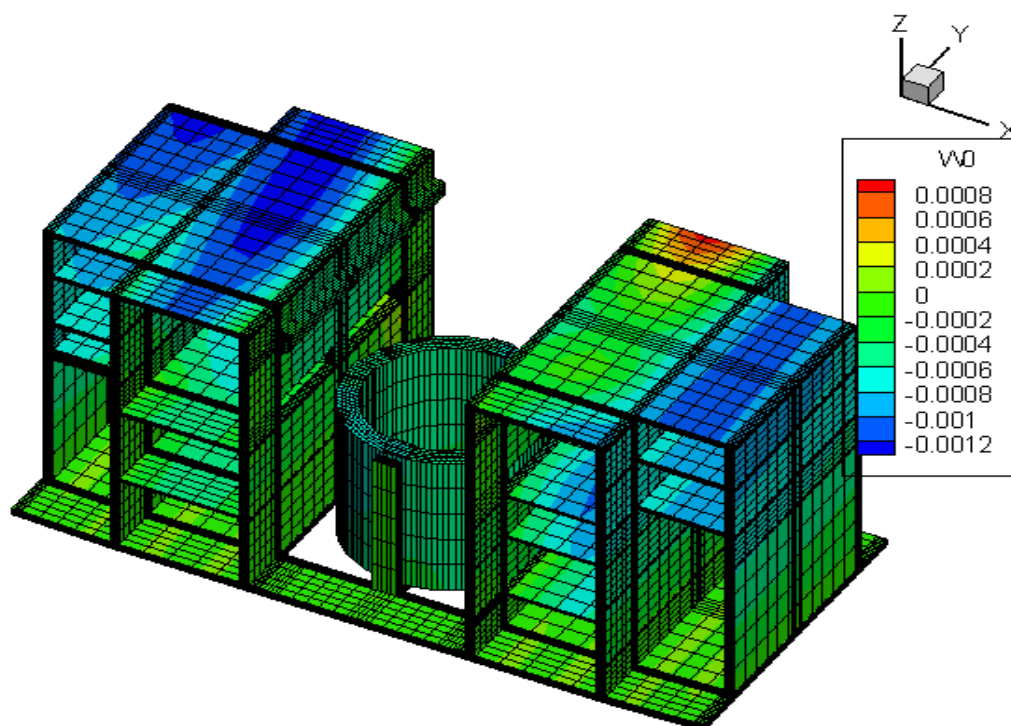
5.7. Нагружение многослойного грунтового массива.



5.8. Расчет инвентарного моста переправы

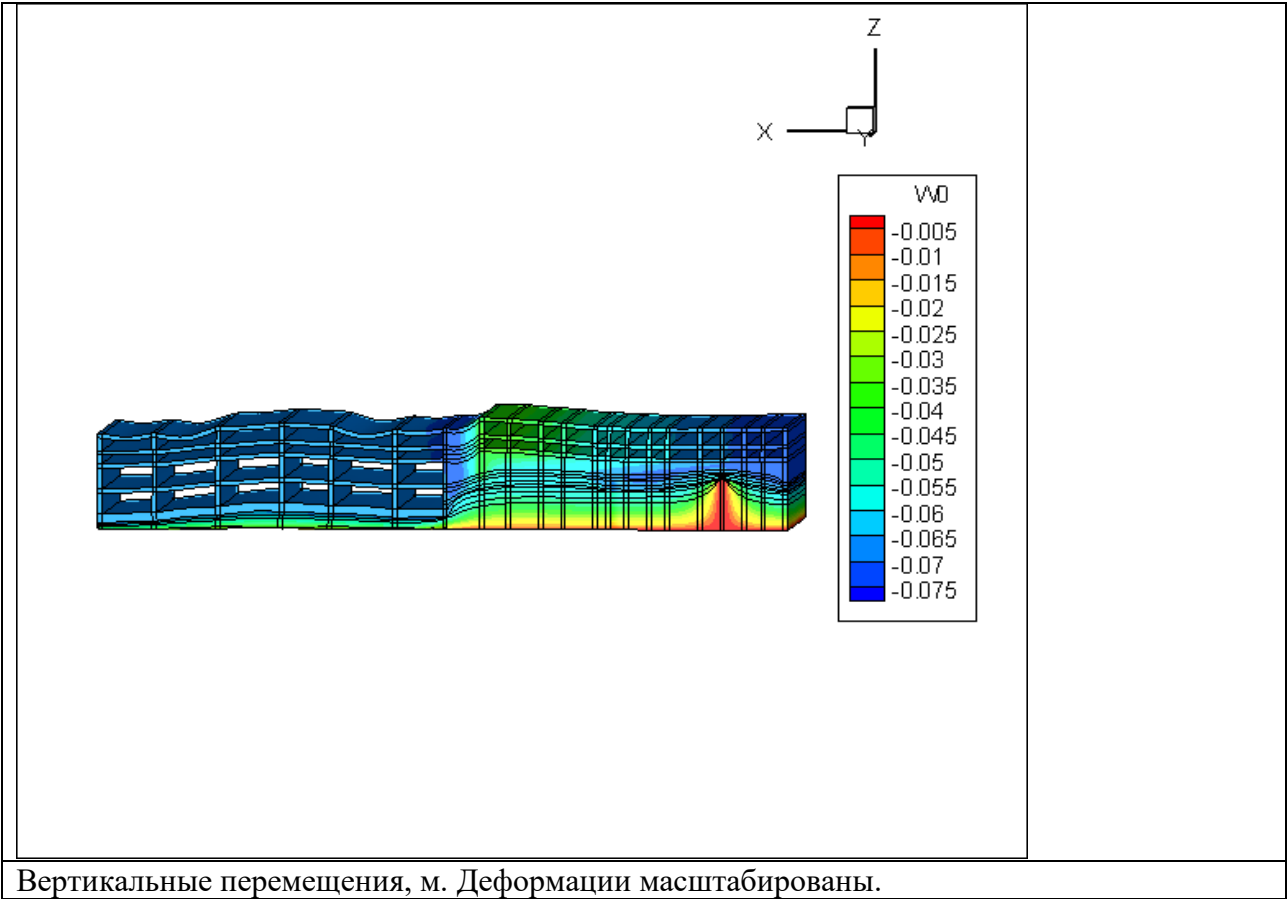
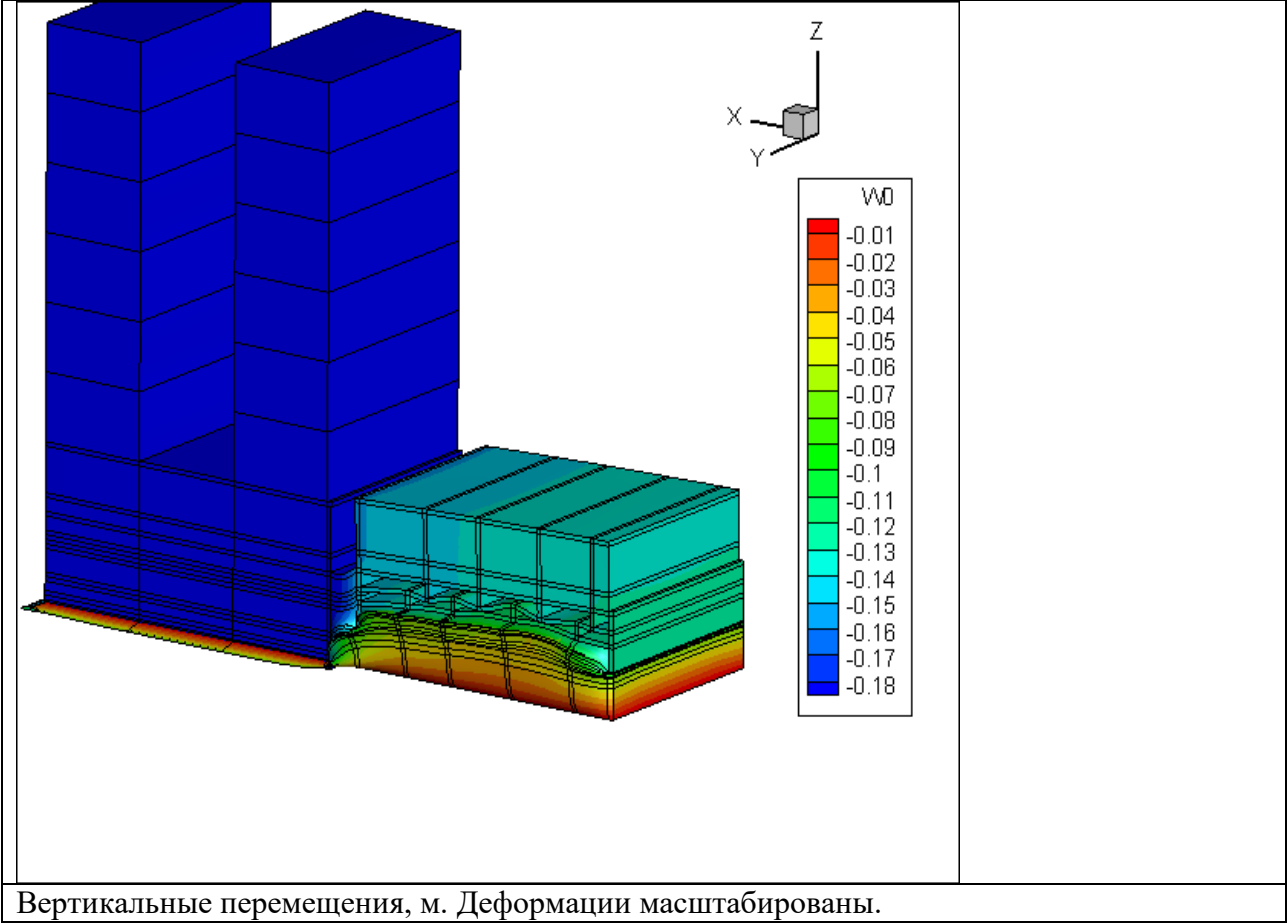


5.9. Расчет реакторного отделения АЭС на ВУВ (Воздушную Ударную Волну) и сейсмику

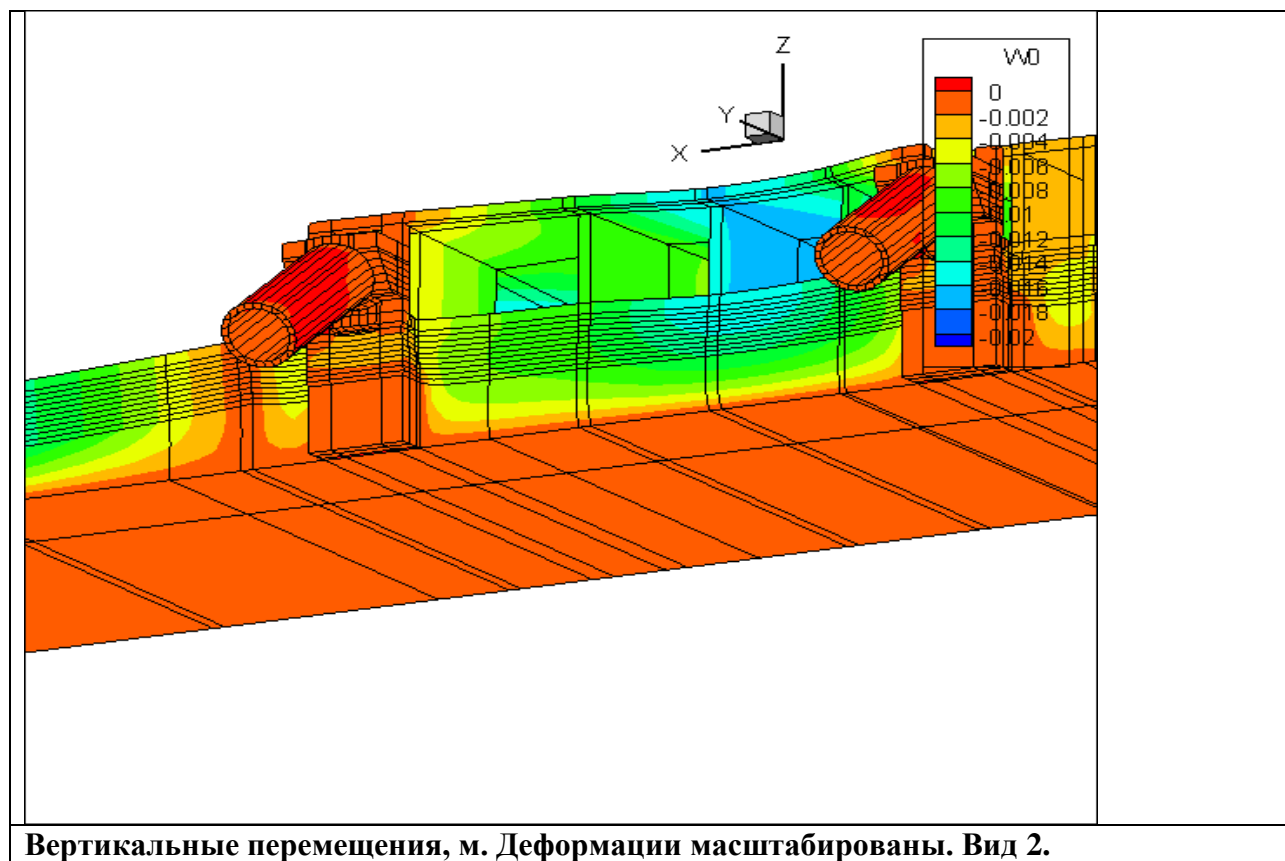
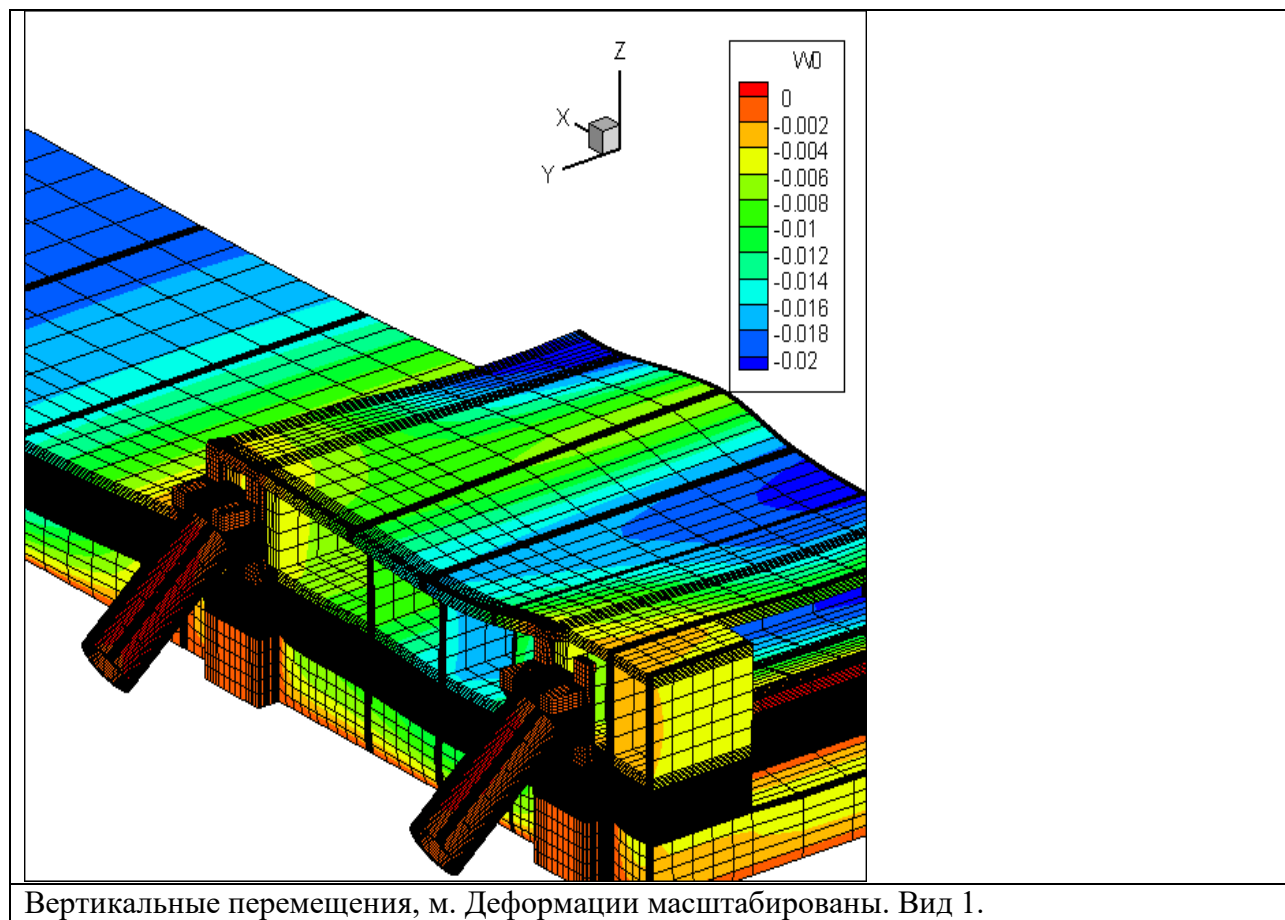


Вертикальные перемещения, м.

5.10. Управляемый подъем зданий компенсационным нагнетанием.



5.11. Расчет эскалаторных входов м. Чкаловская.



5.12. Распределение температуры в грунтовом массиве при сбойке метрополитена.

